Aldo Pappalepore
aldo.pappalepore@libero.it

Investigation of Collatz's conjecture

Indagine sulla congettura di Collatz

Abstract

In the article, a study is developed on the Collatz conjecture that is to determine for each initial odd natural number the relationship existing between the even and odd steps of the corresponding orbit, to demonstrate the narrowness of the succession and the absence in it of cycles preceding that 4, 2, 1.

Nell'articolo viene sviluppato uno studio sulla congettura di Collatz in grado di determinare per ogni numero naturale iniziale dispari la relazione esistente tra i passi pari e quelli dispari della relativa orbita, di dimostrare la limitatezza della successione e l'assenza in essa di cicli precedenti a quello 4, 2, 1.

1 Introduzione

La congettura di Collatz (conosciuta anche come congettura 3n + 1) è una congettura matematica tuttora irrisolta. Fu enunciata per la prima volta nel 1937 da Lothar Collatz, da cui prende il nome.

La congettura si può esprimere con il seguente algoritmo:

1. Si prenda un intero positivo n.
2. Se n = 1, l'algoritmo termina.
3. Se n è pari, si divide per due; altrimenti si moltiplica per 3 e si aggiunge 1.

e cioè algebricamente:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \; se\ n\ \text{è}\ pari \\ 3n + 1 \; se\ n\ \text{è}\ dispari \end{cases}$$

Applicando ripetutamente questa funzione è possibile formare una successione $\{a_n\}_{n\,\mathcal{E}\,N}$, chiamata anche orbita o traiettoria, che presenta come primo elemento un qualunque intero positivo n e come elementi successivi quelli che si ottengono applicando la funzione all'elemento precedente, cioè:

$$a_i = \begin{cases} n \;\; per\ i = 0 \\ f(a_{i-1}) \;\; per\ i > 0 \end{cases}$$

Per esempio, iniziando con n = 18, otteniamo la successione 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20. 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

La congettura di Collatz asserisce che questa successione giunge sempre ad un elemento uguale ad 1 indipendentemente dal valore di partenza. Più formalmente:

$\forall\, n\, \mathcal{E}\, N > 0 \;\; \exists\, i\, \mathcal{E}\, N : (a_0 = n \; => \; a_i = 1)$

2 Lo stato della ricerca in pillole

La congettura è stata verificata mediante computer per tutti i valori fino a circa 10^{20} il ché ovviamente non significa che essa sia stata dimostrata.

In base a considerazioni probabilistiche, se si considerano solo i numeri dispari della successione $\{a_n\}_{n \varepsilon N}$, si può affermare che in media il successivo numero dispari dovrebbe essere pari a circa i 3/4 del precedente, fatto che suggerisce che essi decrescano gradualmente fino a raggiungere 1.

Nel 1976 il matematico Riho Terras dimostrò che, *per quasi tutti i numeri*, dopo l'applicazione di un numero opportuno di passi la sequenza raggiunge un valore minore di quello di partenza.

Infine recentemente il matematico Terence Tao ha dimostrato che sempre per *quasi tutti i numeri* la sequenza raggiunge, prima o poi, un valore molto più basso di quello N iniziale, come per esempio N/2 o il logaritmo di N o una qualunque funzione *f(N)* che tenda all'infinito con N. Ovviamente questa dimostrazione aumenta la convinzione che la congettura sia vera.

3 L'insieme dei termini della successione

Analizziamo ora i vari termini della successione $\{a_n\}_{n \varepsilon N}$ ed ipotizziamo che la stessa scaturisca da un numero dispari qualsiasi d_0 (infatti se il numero iniziale è pari ed è diverso da una potenza di 2, applicando la funzione f(n) per gli n pari, si perviene sempre ad un numero dispari d_0 diverso da 1, mentre se il numero iniziale è uguale ad una potenza di 2 applicando la f(n) si perviene direttamente ad 1). Ponendo allora $a_0 = d_0$ e sapendo che i termini della successione sono del tipo 3d+1 (con d numero dispari) o del tipo $(3d+1)/2^h$ o infine del tipo d (intero dispari), possiamo affermare che tutti i termini della successione appartengono alla griglia seguente:

$3*\mathbf{1}+1$	$3*\mathbf{3}+1$	$3*\mathbf{5}+1$	$3*\mathbf{7}+1$	$3*\mathbf{9}+1$	$3*\mathbf{11}+1$	$3*\mathbf{(..)}+1$
$(3*\mathbf{1}+1)/2$	$(3*\mathbf{3}+1)/2$	$(3*\mathbf{5}+1)/2$	$(3*\mathbf{7}+1)/2$	$(3*\mathbf{9}+1)/2$	$(3*\mathbf{11}+1)/2$	$(3*\mathbf{(..)}+1)/2$
$(3*\mathbf{1}+1)/2^h=p$	$(3*\mathbf{3}+1)/2^h=p$	$(3*\mathbf{5}+1)/2^h=p$	$(3*\mathbf{7}+1)/2^h=p$	$(3*\mathbf{9}+1)/2^h=p$	$(3*\mathbf{11}+1)/2^k=p$	$(3*\mathbf{(..)}+1)/2^h=p$
……..	……..	……..	……..	……..	……..	……..
$(3*\mathbf{1}+1)/2^k=d$	$(3*\mathbf{3}+1)/2^k=d$	$(3*\mathbf{5}+1)/2^k=d$	$(3*\mathbf{7}+1)/2^k=d$	$(3*\mathbf{9}+1)/2^k=d$	$(3*\mathbf{11}+1)/2^k=d$	$(3*\mathbf{(..)}+1)/2^k=d$

in cui la prima riga contiene gli infiniti termini **pari** 3d+1, la seconda riga gli infiniti termini (3d+1)/2, le righe intermedie gli ***eventuali*** infiniti termini **pari** $(3d+1)/2^h$ e la riga finale gli infiniti termini **dispari** $(3d+1)/2^k$ con 2^k la massima potenza di due che divide (3d+1). Logicamente laddove 4 non divide (3d+1) mancheranno nella colonna corrispondente i termini intermedi e quello finale, uguale al secondo termine, sarà proprio (3d+1)/2.

Osservazione 3.1 Osserviamo subito che per un qualsiasi d_i se $3d_i+1$ è divisibile soltanto per due dando come risultato un numero dispari d_j il termine successivo della successione $3d_j+1$ si sposta in una colonna della griglia successiva a quella di $3d_i+1$ (per es. $3*\mathbf{7}+1$); invece se $3d_i+1$ è divisibile per 2^k con k > 1 allora $3d_j+1$ si sposta in una colonna della griglia precedente a quella di $3d_i+1$ (per es. $3*\mathbf{9}+1$). Ovviamente se il primo caso (divisibilità di $3d_i+1$ per 2^k solo per k=1) si ripete con i $3d_j+1$ successivi per m volte ci saranno m spostamenti in avanti del termine $3d_i+1$ e viceversa nel senso che se $3d_i+1$ è divisibile per 2^k con k > 1 il termine risultante $3d_i+1$ si sposterà nella griglia tanto più indietro quanto più grande è k.

Questa osservazione ci consente di evidenziare il carattere non monotono della nostra successione e la centralità che, per il nostro studio sulla congettura, ha il termine $(3d+1)/2^k$ con 2^k la massima potenza di due che divide (3d+1),.

4 Una successione quasi equivalente

Ai fini della nostra dimostrazione possiamo sostituire la nostra successione $\{a_n\}_{n \varepsilon N}$ con la successione $\{d\}_{n \varepsilon N}$ che presenta come primo elemento un qualunque intero positivo dispari d_0 e come elementi successivi i numeri dispari che si ottengono applicando all'elemento precedente d la funzione g(d) in cui 2^k è la massima potenza di due che divide 3d+1:

(4.1) $g(d) = \frac{3d+1}{2^k}$

e pertanto ogni elemento della successione $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ sarà:

(4.2) $d_i = \begin{cases} d_0 \; per \; i = 0 \\ g(d_{i-1}) \;\; per \; i > 0 \end{cases}$

L'orbita della successione $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$, a parità dell'ingresso d_0, ripercorre tutti i nodi dispari dell'orbita della successione $\{a_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$.

Come sussiste per la successione $\{a_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ anche per quella quasi equivalente $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ la congettura risulterebbe falsa se esistesse un numero d_0 Ɛ N per il quale le due relative successioni non contenessero il numero 1 e cioè se le successioni fossero illimitate superiormente oppure se esistesse in esse un ciclo che si ripete senza mai dare 1. La veridicità o meno della congettura per la $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ comporta anche quella della $\{a\}_{n\,\varepsilon\,N}$ in quanto se è superiormente limitata la prima lo sarà anche la seconda (e viceversa) e se esiste un numero pari [(3***d**+1) o (3***d**+1)/2^h] che si ripete nella successione $\{a\}_{n\,\varepsilon\,N}$ dando luogo ad un ciclo che si ripete senza mai dare 1 ce ne sarà sicuramente anche uno dispari [**d** o (3***d**+1)/2^k] che si ripeterà in quella $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$.

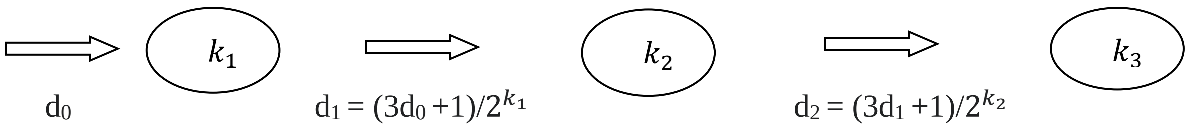
Allora per dimostrare che la successione $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ giunge sempre ad 1 dobbiamo dimostrare che:

a) la successione è superiormente limitata e quindi non esiste alcun numero dispari d per cui la successione tende ad infinito

b) fino al nodo dell'orbita pari ad 1 non ci sono in essa numeri che si ripetono senza mai dare 1 e quindi nessun termine della successione $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ è uguale ad un suo termine precedente.

5 Incrementi e decrementi nell'orbita $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$

Nella successione (orbita) equivalente $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ ogni nodo k_i presenta in ingresso l'uscita d_{i-1} del nodo precedente k_{i-1} ed in uscita il numero $d_i = (3^* d_{i-1} + 1)/2^{k_i}$ con 2^{k_i} la massima potenza di 2 che divide ($3^* d_{i-1}$ + 1).



Analizzando il comportamento dei numeri pari (3d+1) ∀ d Ɛ D, con D insieme dei numeri interi positivi dispari, si può osservare che i numeri d che generano (3d+1) divisibili per 2^k solo con k=1 sono del tipo:

(5.1) d = 3 + 4m con m = 0, 1, 2, 3, 4, ……….

e quindi appartengono all'insieme D_1 = {3, 7, 11, 15, 19, …………}

e quelli che invece generano (3d+1) divisibili per 2^k con k>1 sono del tipo:

(5.2) d = 1 + 4m con m = 0, 1, 2, 3, 4, ……….

e quindi appartengono all'insieme D_2 = {1, 5, 9, 13, 17, 21, ………}

Osservazione 5.3 La densità in D dei numeri appartenenti all'insieme D_1 è pari ad 1/2 così come la densità dei numeri appartenenti a D_2. In particolare abbiamo che le densità in D_2 (con $k \geq 2$), dei numeri d che generano (3d+1) divisibili per 2^k sono pari a $1/2^{k-1}$.

Ora per ogni nodo K_i dell'orbita tra l'uscita d_i e l'ingresso d_{i-1} sussiste la seguente relazione approssimata:

(5.4) $d_i = (3d_{i-1} + 1)/2^{k_i} \approx 3d_{i-1}/2^{k_i}$

da cui discende che, se $K_i = 1$ (vedi anche l'Osservazione 3.1) e quindi d_{i-1} appartiene a D_1, $d_i > d_{i-1}$ e vale:

(5.5) $d_i \approx (3/2) * d_{i-1}$

con un rapporto tra d_i e d_{i-1} maggiore di 1 che chiameremo **rapporto di incremento**.

Se invece se $K_i > 1$ e quindi d_{i-1} appartiene a D_2, si ha che $d_i < d_{i-1}$ e vale:

(5.6) $d_i \approx (3/2^{k_i}) * d_{i-1}$

con un rapporto tra d_i e d_{i-1} minore di 1 che chiameremo **rapporto di decremento.**
.
Osservazione 5.7 E' bene notare che se d_{i-1} passa per un nodo $K_i = 1$ il suo valore si incrementa di ½, se passa invece per un nodo $K_i = 2$ il suo valore si decrementa di ¼ (minore quindi dell'incremento con $K_i = 1$), se infine passa per un nodo $K_i > 2$ il valore di d_{i-1} si decrementa di $(2^{k_i}-3)/2^{k_i}$ (maggiore quindi dell'incremento con $K_i = 1$)

Se quindi per esempio l'orbita relativa ad un ingresso qualsiasi d_{in} fosse costituita da una sequenza periodica di nodi costituita da: $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $K_3 = 1$ e $K_4 = 3$ il d_{in} di ingresso al nodo K_1 aumenterebbe prima a $(3/2)*d_{in}$, per poi diminuire a $(9/8)*d_{in}$, per poi riaumentare a $(27/16)*d_{in}$ ed infine per diminuire a $(81/129)*d_{in}$; alla fine della sequenza il d_{out} di uscita dal nodo K_4 risulterebbe minore del d_{in} di ingresso al nodo K_1 e varrebbe circa $0{,}63* d_{in}$.

Se invece l'orbita fosse costituita da una sequenza periodica di nodi costituita da: $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $K_3 = 2$ e $K_4 = 2$ il d_{in} di ingresso al nodo K_1 aumenterebbe prima a $(3/2)*d_{in}$, poi a $(9/4)*d_{in}$, per poi diminuire a $(27/16)*d_{in}$ e quindi a $(81/64)*d_{in}$; alla fine della sequenza il d_{out} di uscita dal nodo K_4 risulterebbe maggiore del d_{in} di ingresso al nodo K_1 e varrebbe circa $1{,}26* d_{in}$.

Ovviamente questi esempi sono solo esemplificativi e nulla ci dicono sull'andamento reale di un'orbita generata da d_0, sulla sequenza dei nodi K_i così come sul loro valore (1,2,3,4,etc.); l'andamento dell'orbita infatti deriva solo da d_0 e dalla successione $\{d_n\}_{n \,\varepsilon\, N}$ che esso determina applicando iterativamente la funzione g(d).
Ora ai fini del nostro studio interessa stabilire se la successione $\{d_n\}_{n \,\varepsilon\, N}$ è limitata o meno superiormente e quindi se nell'orbita prevalgono i rapporti di incremento o i rapporti di decremento oppure se gli stessi si equivalgono.

Osservazione 5.8 Da quanto scritto sopra (Osservazione 5.7) i nodi con k=1 (cioè d_i Ɛ D_1) determinano un rapporto di incremento mentre i nodi con k>1 (cioè d_i Ɛ D_2) un rapporto di decremento decrescente al crescere di k. Inoltre per valutare la variazione relativa a d_0 di un d_i qualsiasi dell'orbita di d_0 bisogna anche considerare le possibili sequenze di nodi consecutivi con k=1 che, qualora fossero ininterrotte, determinerebbero la divergenza della successione e quindi la sua illimitatezza superiore.

6 Rapporti di incremento e di decremento medi nell'orbita $\{d_n\}_{n \,\varepsilon\, N}$

Per determinare la variazione media relativa a d_0 di un d_i qualsiasi dell'orbita di d_0 bisogna quindi rifarsi al valore medio dei rapporti di incremento determinati dalle sequenze di nodi con k=1 presenti nell'orbita corrente ed al valore medio dei rapporti di decremento determinati dai nodi con k>1 in essa presenti.
A tal fine consideriamo un algoritmo informatico A.I. che simula l'orbita di d_0 descritta dalla $\{d_n\}_{n \, \varepsilon \, N}$ con l'esclusione dei nodi (numeri) dispari intermedi delle sequenze di nodi consecutivi con k=1. Questo il suo diagramma di flusso:

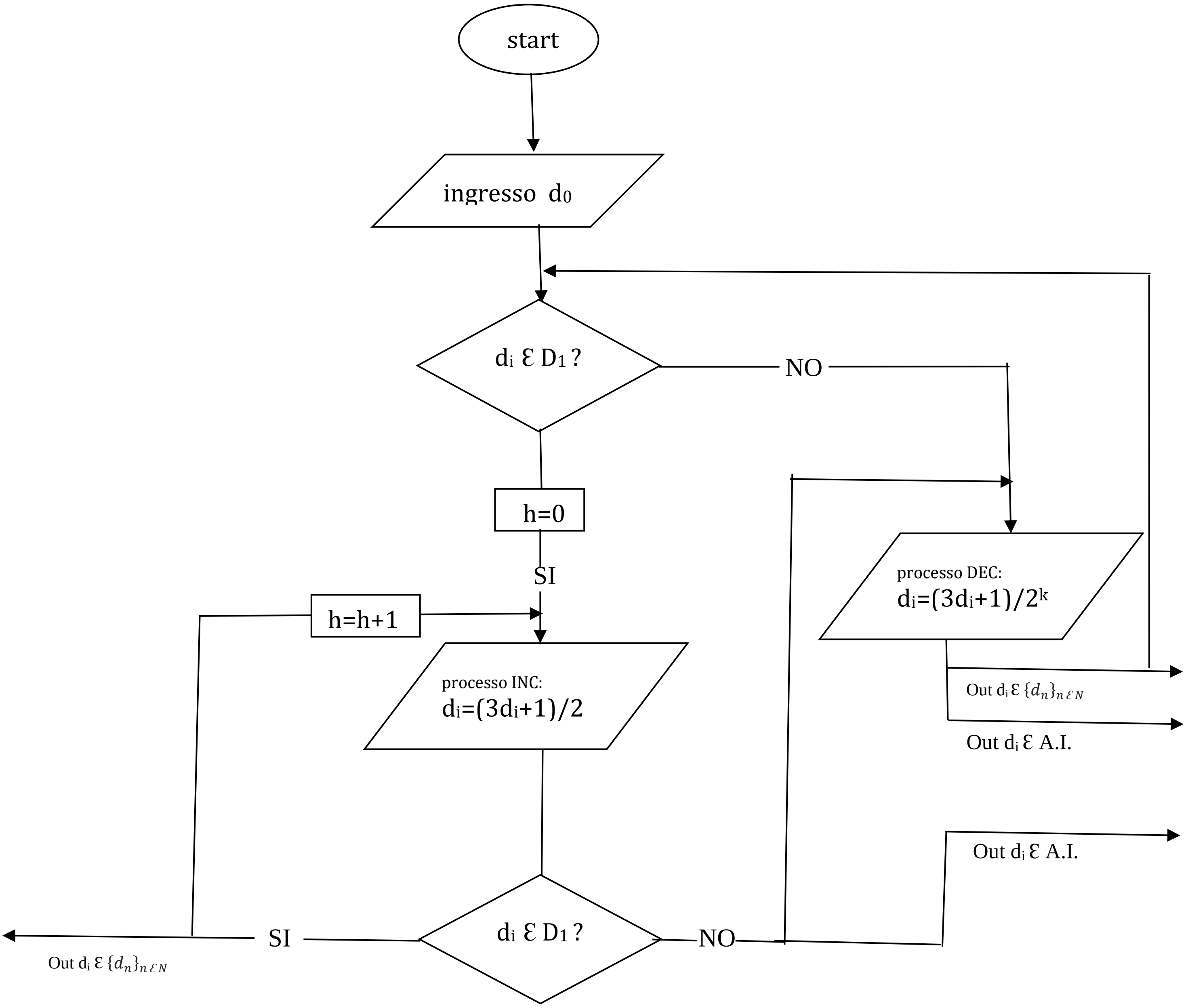


Figura 1

Nel diagramma di flusso dell'algoritmo sono indicate quattro uscite, due danno luogo a tutti i nodi della successione $\{d_n\}_{n \, \varepsilon \, N}$ mentre le altre due sono relative agli esiti del processo DEC (decremento) e di quello INC (incremento) completo (cioè fino alla d_i Ɛ D_2) che determinano rispettivamente i decrementi e gli incrementi della d_i. Ovviamente, ai fini della dimostrazione della congettura, noi sappiamo che il d_i (a partire da d_0) attraverserà il processo INC o il processo DEC a seconda che lo stesso d_i appartenga a D_1 o a D_2 mentre nulla sappiamo sul valore del d_0 iniziale e dei d_i dell'orbita di d_0.

6.1 Teorema del rapporto di decremento medio di un'orbita

Enunciato *Il rapporto di decremento medio determinato dagli m_2 numeri naturali dispari d_i dell'orbita, prodotta da un qualunque numero naturale dispari d_0, e che generano $(3d_i +1)$ divisibili per 2^k con $k >1$ tende a 0,375 al crescere di m_2.*

Dimostrazione Se ipotizziamo, solo per comodità di ragionamento, che i d_i dell'orbita di d_0 appartenenti a D_2 siano tutti compresi nell'intervallo $[1, 2^n]$ in modo da avere che tutti i d_i dell'orbita appartengono al sottoinsieme di D_{2n}:

(6.2) $D_{2n} = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots\ldots\ldots 2^n+1\}$

possiamo calcolare il rapporto di decremento medio $v_{md(n)}$ che un d_i dell'insieme D_{2n} subisce nel processo DEC facendo una media geometrica ponderata (assumendo come pesi le rispettive densità) dei rapporti di decremento che subiscono lungo l'orbita tutti i numeri d_i appartenenti all'insieme D_{2n}:

(6.3) $v_{md}(n) = \sqrt[M]{\prod_{k=2}^{n} {x_k}^{y_k}}$

dove x_k è il rapporto di decremento uguale a $3/2^k$; y_k è la densità (Osservazione 5.3) dei numeri d_i Ɛ D_{2n} che generano $(3d_i +1)$ divisibili per 2^k che è pari a $1/2^{k-1}$ ed M è la somma delle densità uguale a $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$.

Pertanto la (6.3) diventa:

(6.4) $v_{md}(n) = \sqrt[\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}]{\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{3}{2^k}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}}$

Ovviamente però i d_i dell'orbita di d_0 appartenenti a D_2 possono spaziare, a partire da d_0, in tutto l'insieme infinito D_2 e quindi il rapporto di decremento medio $v_{md}(D_2)$ sarà pari a:

(6.5) $v_{md}(\mathrm{D2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(v_{md}(n)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}]{\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{3}{2^k}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}} = 0{,}375$

Ovviamente quanto più l'orbita di d_0 è lunga, e con essa cresce anche il numero m_2 dei d_i Ɛ D_2 (d_i tutti distinti tra loro come dimostreremo in seguito) che passano attraverso il processo DEC, tanto più la media dei rapporti di decremento avvenuti si avvicina al valore medio calcolato della (6.5) come volevasi dimostrare.

6.6 Teorema del rapporto di incremento medio di un'orbita

Enunciato *Il rapporto di incremento medio determinato dagli m_1 numeri naturali dispari d_i dell'orbita, prodotta da un qualunque numero naturale dispari d_0, e che generano sequenze di h $(3d_i +1)$ divisibili consecutivamente per 2^k con $k =1$ tende a 2,250 al crescere di m_1.*

Dimostrazione Se ipotizziamo, solo per comodità di ragionamento, che i d_i dell'orbita di d_0 appartenenti a D_1 siano tutti compresi nell'intervallo $[1, 2^n]$ in modo da avere che tutti i d_i dell'orbita appartengono al sottoinsieme di D_{1n}:

(6.7) $D_{1n} = \{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\ldots\ldots\ldots 2^n-1\}$

possiamo calcolare il rapporto di incremento medio $v_{mi(n)}$ che un d_i dell'insieme D_{1n} subisce nel processo INC facendo una media geometrica ponderata (assumendo come pesi le rispettive densità) dei rapporti di incremento che subiscono lungo l'orbita tutti i numeri d_i appartenenti all'insieme D_{1n}.

Osservazione 6-8 Al fine di determinare le densità dei diversi rapporti di incremento, dipendenti dalla lunghezza h delle sequenze del processo INC attraversato dal generico d_i dell'insieme D_{1n}, analizziamo la Figura dell'allegato A. In essa possiamo rilevare che le densità in D_{1n} delle sequenze del processo INC e quindi dei rapporti di incremento relativi ad un d_i Ɛ D_{1n} sono uguali per le sequenze di lunghezza h (con h=1, 2, 3, ……….n-2) ad $1/2^h$ e per h=n-1 ad $1/2^{(n-2)}$.

Lemma 6.9 *Dallo studio della figura 2 e da quanto ne abbiamo già dedotto possiamo affermare che relativamente ad un intervallo [1, 2^n] la massima lunghezza di una sequenza INC determinata da un d_i dell'insieme D_{1n} appartenente al suddetto intervallo è pari ad n-1, dopodiché nell'orbita ci sarà sicuramente un decremento.*

In base alle densità in D_{1n} delle sequenze del processo INC sopra determinate ed al rapporto di incremento di d_i di pari a 3/2 [vedi (5.5)] per ogni singolo passaggio nel processo INC possiamo calcolare ora il rapporto di incremento medio relativo $v_{mi(n)}$ che un d_i dell'insieme D_{1n} subisce in una sequenza di processi INC facendo una media geometrica ponderata (assumendo come pesi le rispettive densità delle diverse sequenze) dei rapporti di incremento che subiscono lungo l'orbita tutti i numeri d_i appartenenti all'insieme D_{1n}:

$$(6.10)\quad v_{mi}(n) = \sqrt[M]{\prod_{h=2}^{n} {x_h}^{y_h}}$$

dove x_h è il rapporto di incremento uguale a $(3/2)^h$; y_k è la densità (Osservazione 6.8) dei numeri d_i Ɛ D_{2n} che generano ($3d_i$ +1) divisibili per 2 che è pari a $1/2^h$ ed M è la somma delle densità uguale a $\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{2^h}$.

Pertanto la (6.10) diventa:

$$(6.11)\quad v_{mi}(n) = \sqrt[\sum_{h=1}^{n-2}\frac{1}{2^h}]{\prod_{h=1}^{n-2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^h\right]^{\frac{1}{2^h}} * \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{2^{n-2}}}}$$

Ovviamente però i d_i dell'orbita di d_0 appartenenti a D_1 possono spaziare, a partire da d_0, in tutto l'insieme infinito D_2 e quindi il rapporto di decremento medio $v_{mi}(D_2)$ sarà pari a:

$$(6.12)\quad v_{mi}(\mathrm{D1}) = \lim_{n\to\infty}\left(v_{mi}(n)\right) = \sqrt[\sum_{h=1}^{n-2}\frac{1}{2^h}]{\prod_{h=1}^{n-2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^h\right]^{\frac{1}{2^h}} * \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{2^{n-2}}}} = 2.250$$

Ovviamente quanto più l'orbita di d_0 è lunga, e con essa cresce anche il numero m_1 dei d_i Ɛ D_1 (d_i tutti distinti tra loro come dimostreremo in seguito) che passano attraverso le sequenze del processo INC, tanto più la media dei rapporti di incremento avvenuti si avvicina al valore medio calcolato della (6.12) come volevasi dimostrare.

7 La limitatezza superiore dell'orbita $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$

Gli Out d_i dell'Algoritmo Informatico di figura 1 generano una successione (orbita) $\{AI\}_{n\,\varepsilon\,N}$ di d_0 che eguaglia l'orbita di d_0 descritta dalla $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ con l'esclusione dei nodi (numeri) dispari intermedi delle sequenze di nodi con k=1 del processo INC. Ciò comporta che la limitatezza superiore o meno della $\{AI_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ implica anche quella della $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ e della $\{a_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$.

7.1 Teorema sulla limitatezza superiore dell'orbita di Collatz

Enunciato *L'orbita di Collatz* $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ *è limitata superiormente*

Dimostrazione Premesso che nell'algoritmo informatico di figura 1:

- le uscite d_{i2} Ɛ D_2 sono maggiori delle uscite d_{i1} Ɛ D_1 in quanto, a parità della loro densità (1/2) in D, il processo INC attraversato da un d_{i1} genera sempre un d_{i2} mentre il processo DEC attraversato da un d_{i2} genera sia d_{i1} che d_{i2}
- mentre esistono d_{i2} tali che $3d_{i2}+1$ è uguale a 2^n (con n pari) e che quindi genera a valle del processo DEC il numero 1 (termine dell'orbita di Collatz), non esistono d_{i1} tali da attivare col processo INC una sequenza di incrementi infiniti visto che in base al Lemma 6.9 la massima lunghezza di una sequenza INC determinata da un d_{i1} è pari ad n-1 passi dispari con n uguale all'esponente della prima potenza di 2 maggiore di d_{i1}
- per qualsiasi d_i di una successione (orbita) $\{AI\}_{n\,\varepsilon\,N}$ generata da un numero dispari d_0 vale la seguente relazione:

  (7.2) $\frac{d_i}{d_0} = r_{1*}\, r_{2*}\, r_{3*}\, r_{4*}\, r_{5*}\, r_{6*} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, r_j$

  nella quale il secondo termine costituisce una distribuzione generata dalla funzione g(d) in cui gli r_i (con i<j) indicano i rapporti d_j/d_{j-1} di incremento e di decremento che i vari d_i dell'orbita subiscono negli alterni rispettivi processi INC e DEC (ad ogni processo INC segue sempre almeno un processo DEC ma ne possono essere anche di più giacché in ogni orbita d_{i2} Ɛ D_2 è sempre maggiore o uguale di d_{i1} Ɛ D_1)

ipotizziamo che esistano uno o più numeri d_0, generatori della successione $\{AI_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$, e quindi anche delle successioni $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ ed $\{a_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$, che danno luogo nei processi INC a rapporti di incremento di d_i maggiori di $V_{mi}(D_1)$ e nei processi DEC a rapporti di decremento di d_i minori di $V_{md}(D_2)$ con la conseguenza di avere una successione di valori mediamente crescenti di d_i anche se non infiniti grazie al Lemma 6.9.

Ma questo andamento crescente della successione non può perdurare all'infinito. Al crescere degli d_i (e cioè dei nodi dell'orbita di d_0) infatti i valori medi dei rapporti di incremento e dei rapporti di decremento che si verificano si avvicinano ai due valori medi calcolati con la (6.5) e la (6.12) per cui ogni nuovo d_{i1} determina un rapporto di incremento complessivo medio rispetto a d_0 dei processi INC sempre più prossimo a 2,25 ed ogni nuovo d_{i2} dà luogo ad un rapporto di decremento complessivo medio rispetto a d_0 dei processi DEC sempre più prossimo ad 0.375 col risultato che più l'orbita si allunga senza incontrare l'1 (come ultimo nodo della congettura) più gli incrementi ed i decrementi complessivi si annullano reciprocamente.

Infatti la (7.2) possiamo scriverla anche come:

(7.3) $\frac{d_j}{d_0} = \prod_{i=1}^{Rinc} r_{in} * \prod_{d=1}^{Rdec} r_{de}$

dove r_{in} ed r_{de} sono i rapporti singoli di incremento e di decremento e Rinc ed Rdec (con Rdec≥Rinc) sono il numero di rapporti di incremento ed il numero di rapporti di decremento presenti nell'orbita da d_0 e d_j.
La proprietà principale del valore medio di una distribuzione geometrica è:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_{me}$$

dove x_i è il generico termine di una distribuzione di n termini ed x_{me} il suo valore medio.

Se invece ci limitiamo al prodotto di soli m (con m << n) termini della distribuzione sarà sempre molto probabilmente:

$\prod_{i=1}^{m} x_i \neq \prod_{i=1}^{m} x_{me}$

con la differenza tra i due prodotti decrescente al crescere di m fino ad azzerarsi per m=n o, nel caso di distribuzione infinita, fino all'uguaglianza:

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{m} x = \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{m} x_{me}$$

Se quindi ci riferiamo alla nostra distribuzione (7.2) { r_{1*} r_{2*} r_{3*} r_{4*} r_{5*} r_{6*}......... } di infiniti termini appartenenti all'intervallo]0, ∞] di R potremo scrivere per analogia:

(7.4) $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} r_i = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} r_m$ con r_m valore medio della distribuzione (7.2)

ed in base alla (7.3):

(7.5) $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} r_i = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{Rinc} r_{in} * \prod_{d=1}^{Rdec} r_{de} = \lim_{rinc\to\infty} \prod_{i=1}^{Rinc} r_{in} * \lim_{rdec\to\infty} \prod_{d=1}^{Rdec} r_{de} =$

$= \lim_{rinc\to\infty} \prod_{i=1}^{Rinc} v_{mi}(D_1) * \lim_{rdec\to\infty} \prod_{d=1}^{Rdec} v_{md}(D_2) = \lim_{rinc\to\infty} v_{mi}(D_1)^{Rinc} * \lim_{rdec\to\infty} v_{md}(D_2)^{Rdec}$

ed essendo $v_{mi}(D_1) = 2{,}250$, $v_{md}(D_2) = 0{,}375$ per cui $v_{mi}(D_1) * v_{md}(D_2) = 0.84375$ ed essendo tra l'altro lungo l'orbita Rdec ≥ Rinc, risulterà sempre che il $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} r_i < 1$.

Il risultato è che, finché nell'orbita non si è già generato il numero 1, i d_i di uscita si avvicinano sempre più all'ingresso d_0 per poi scenderne al di sotto. Inoltre la disparità presente nell'orbita tra i d_{i2} ed i d_{i1} con prevalenza dei primi (vedi premessa) spinge l'orbita verso il basso ed i d_i ad assumere valori mediamente inferiori a d_0.

Osservazione 7.6 In definitiva più l'orbita di un qualsiasi d_0 si prolunga, più gli d_i di avanzamento della stessa si mantengono inferiori a d_0 e comunque la successione $\{AI_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ si mantiene superiormente limitata così come di conseguenza saranno limitate superiormente anche le successioni $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ ed $\{a_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$.

8 I passi dell'orbita $\{a_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$

Utilizzando un approccio più aritmetico alla successione $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ possiamo ricavare l'espressione del generico termine id-esimo dispari d_{id} della successione.

Lemma 8.1 *Data una successione $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ generata da un qualunque intero positivo dispari d_0 e che presenta come termini successivi i numeri dispari che si ottengono applicando al termine precedente d la funzione g(d) = $\frac{3d+1}{2^k}$, in cui 2^k è la massima potenza di due che divide 3d+1, l'espressione del generico termine id-esimo dispari d_{id} della successione è:*

(8.2) $$d_{id} = \frac{3^{id}*d_0+3^{id-1}+3^{id-2}*2^{s_1}+3^{id-3}*2^{s_1+s_2}+\cdots.........+3*2^{s_1+\cdots+s_{id-2}}+2^{s_1+\cdots+s_{id-1}}}{2^{s_1+\cdots+s_{id}}}$$

dove:

- *d_{id} è il generico termine d_i dispari della successione derivante dalla divisione del termine $3d_{id-1}$+1 per la massima potenza di 2 che lo può dividere*
- *s_i è l'esponente della massima potenza di 2 per cui è divisibile il termine $3d_{i-1}$+1*
- *id rappresenta il numero di passi dispari della successione $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ (e di quella $\{a\}_{n\,\varepsilon\,N}$) fino al nodo d_{id}*
- *$s_1 + s_2 + \cdots \ldots\ldots + s_{id}$ = ip rappresenta la somma degli esponenti delle massime potenze di due per cui sono divisibili i termini $3d_{i-1}$+1 per tutti i d_i della successione $\{d\}_{n\,\varepsilon\,N}$ fino a d_{id}*

Dimostrazione In base alla definizione della $\{d\}_{n \,\varepsilon\, N}$ i primi termini d_{id} (con id indice dei termini della successione) successivi a d_0 sono:

$d_1 = \frac{(3d_0+1)}{2^{s_1}}$; $d_2 = \frac{(3d_1+1)}{2^{s_2}} = \frac{3*\frac{(3d_0+1)}{2^{s_1}}+1}{2^{s_2}} = \frac{3^2*d_0+3+2^{1_1}}{2^{s_1}*2^{s_2}}$; $d_3 = \frac{(3d_2+1)}{2^{s_3}} = \frac{3*\frac{3^2*d_0+3+2^{1_1}}{2^{s_1}*2^{s_2}}+1}{2^{s_3}} = \frac{3^3*d_0+3^2+3*2^{s_1}+2^{s_1}*2^{s_2}}{2^{s_1}*2^{s_2}*2^{s_3}} = \frac{3^3*d_0+3^2+3*2^{s_1}+2^{s_1+s_2}}{2^{s_1+s_2+s_3}} = \frac{3^{id}*d_0+3^{id-1}+3*2^{s_1}+2^{s_1+s_{id-1}}}{2^{s_1+s_2+s_{id}}}$ dove id=3

procedendo allo stesso modo per i termini successivi al terzo si perviene per ogni d_{id} alla (8.2).

Osservazione 8.3 Si fa presente che gli indici id ed ip del Lemma 8.1 rappresentano rispettivamente anche il numero dei passi pari (termini pari) e di quelli dispari (termini dispari) della successione iniziale $\{a\}_{n \,\varepsilon\, N}$ fino al termine d_{id}.

8.4 Teorema sulla relazione tra i passi dell'orbita $\{a_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$

Enunciato *Data una successione* $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n\,\varepsilon\,N}}$ *generata da un qualunque intero positivo dispari d_0 tra il numero dei suoi passi pari ip e quello dei suoi passi dispari id fino al generico termine dispari d_{id} sussiste la relazione ip =* $\left\lceil log_2\left(3^{id} * \frac{d_0}{d_{id}}\right)\right\rceil$.

Dimostrazione Si è già fatto presente (Osservazione 8.3) che gli id e gli ip, che compaiono nella (8.1) e che sono relativi alla successione $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$, corrispondono ai passi dispari id ed a quelli pari ip della successione $\{a_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ di cui la $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$ è quasi equivalente. Vediamo allora in base alla (8.2) quale relazione è possibile trovare tra l'id e l'ip della $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$.

Innanzitutto possiamo ricavare le seguenti diseguaglianze:

(8.5) $2^{ip} * d_{id} > 3^{id} * d_0$

e sottraendo ad entrambi i membri il termine $2^{ip-1} * d_{id}$ e sapendo che 2^{ip}- $2^{ip-1} = 2^{ip-1}$

(8.6) $2^{ip-1} * d_{id} > 3^{id} * d_0 - 2^{ip-1} * d_{id} \Longrightarrow 2^{ip-1} * d_{id} < 3^{id} * d_0$

e quindi possiamo scrivere:

(8.7) $2^{ip-1} * d_{id} < 3^{id} * d_0 < 2^{ip} * d_{id} \Longrightarrow 2^{ip-1} < 3^{id} * \frac{d_0}{d_{id}}$

Dalla (8.5) ricaviamo che:

(8.8) $2^{ip} > 3^{id} * \frac{d_0}{d_{id}}$

ed essendo pure $2^{ip-1} < 3^{id} * \frac{d_0}{d_{id}}$ risulta che per ogni orbita di d_0 fino ad un qualsiasi d_{id} il numero ip dei passi pari è legato a quello id dei passi dispari dalla seguente relazione:

(8.9) ip = $\left\lceil log_2\left(3^{id} * \frac{d_0}{d_{id}}\right)\right\rceil$

9 Uno è l'unico d_{id} che si ripete nell'orbita $\{d_n\}_{n\,\varepsilon\,N}$

Dimostriamo ora che in un'orbita $\{d\}_{n \,\varepsilon\, N}$, generata da un intero positivo qualsiasi d_0, nessun d_{id} dell'orbita è uguale ad un altro d_{id}, a partire da d_0, fino a quando l'orbita non raggiunge il numero 1 e quindi l'orbita $\{a\}_{n \,\varepsilon\, N}$, di cui $\{d\}_{n \,\varepsilon\, N}$ è quasi equivalente, il ciclo 4, 2, 1.

9.1 Teorema sulla unicità del ciclo 4, 2, 1 nell'orbita $\{a\}_{n \, \varepsilon \, N}$

Enunciato *In ogni orbita di Collatz generata da un qualsiasi intero positivo a_0 esiste solo il ciclo infinito 4, 2, 1*

Dimostrazione Se dimostriamo che nessun numero si ripete in una orbita $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ generata da un qualsiasi intero positivo dispari d_0 fino a quando l'orbita non raggiunge il numero 1, che invece si ripeterà infinitamente, abbiamo anche dimostrato che non esiste alcun ciclo nell'orbita $\{a\}_{n \, \varepsilon \, N}$ fino a quando la stessa non perviene al numero 1. Infatti se nessun d_{id}, a partire da d_0, si ripete lungo l'orbita $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ anche tutti i numeri pari $3d_{id}+1$ e quelli che derivano dalle divisioni successive dello stesso per 2 non si ripeteranno nella corrispondente orbita $\{a\}_{n \, \varepsilon \, N}$. Si ripeteranno invece, infinitamente oltre all'1, il 4 ed il 2 che sono appunto uguali a 3*1+1 ed a (3*1+1)/2.

Vediamo ora perché nessun termine d_{id} della successione si ripete in una orbita $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ fino a quando la stessa non perviene al numero 1.

Abbiamo già visto nella (8.2) che ogni d_{id} appartenente all'orbita $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ è uguale al rapporto di due polinomi crescenti, anche se in maniera diversa, con i passi dispari id dell'orbita:

(9.2) $d_{id} = \dfrac{3^{id} * d_0 + 3^{id-1} + 3^{id-2} * 2^{s_1} + 3^{id-3} * 2^{s_1+s_2} + \cdots \ldots\ldots + 3 * 2^{s_1+\cdots+s_{id-2}} + 2^{s_1+\cdots+s_{id-1}}}{2^{s_1+\cdots+s_{id-1}} * 2^{s_{id}}}$

che ponendo $\Delta = 3^{id-1} + 3^{id-2} * 2^{s_1} + 3^{id-3} * 2^{s_1+s_2} + \cdots \ldots\ldots + 3 * 2^{s_1+\cdots+s_{id-2}} + 2^{s_1+\cdots+s_{id-1}}$

ed $ip = s_1 + s_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots + s_{id}$ diventa:

(9.3) $d_{id} = \dfrac{3^{id} * d_0 + \Delta}{2^{ip}}$

La (9.3) esprime quindi la relazione esistente tra un d_{id} qualsiasi dell'orbita ed il generatore di quest'ultima d_0 e dove id è l'indice del termine d_{id} della successione $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ (nonché il numero dei passi dispari della successione $\{a\}_{n \, \varepsilon \, N}$) ed ip la somma degli esponenti delle potenze di 2 che dividono i termini 3d+1 presenti tra d_0 e d_{id} (nonché il numero dei passi pari della successione $\{a\}_{n \, \varepsilon \, N}$).

Considerando allora due nodi qualsiasi dell'orbita $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ pari rispettivamente a d_{idx} e d_{idy}, con idy > idx, possiamo scrivere:

(9.4) $d_{idx} = \dfrac{3^{idx} * d_0 + \Delta_x}{2^{ipx}}$ e $d_{idy} = \dfrac{3^{idy} * d_0 + \Delta_y}{2^{ipy}}$

dove idx ed idy sono gli indici dei termini d_{idx} e d_{idy} della successione $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ ed ipx ed ipy sono le somme degli esponenti delle potenze di 2 che dividono i vari 3d+1 dei nodi presenti rispettivamente tra d_0 e d_{idx} e tra d_0 e d_{idy}. E' da sottolineare che essendo il termine d_{idy} successivo a quello d_{idx} ed essendo i numeratori e denominatori della (9.2) sempre crescenti col susseguirsi dei nodi dell'orbita $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ (a prescindere dal valore del loro rapporto non monotono) si ha che idy ed ipy sono sempre maggiori rispettivamente di idx ed ipx[1].

Se per assurdo supponiamo che $d_{idy} = d_{idx}$, si dovrebbe avere di conseguenza:

(9.5) $\dfrac{3^{idy} * d_0 + \Delta_y}{2^{ipy}} = \dfrac{3^{idx} * d_0 + \Delta_x}{2^{ipx}}$

[1] Anche nel caso che d_{idy} e d_{idx} sono consecutivi si avrà che idy=idx+1 ed anche ipy sarà maggiore di almeno una unità rispetto a ipx in quanto tra i due termini dispari d_{idx} e d_{idy} ci sta almeno il nodo pari corrispondente a $3 * d_{idx} + 1$

Ora essendo per la (8-7) $2^{ip-1} * d_{id} < 3^{id} * d_0$ e per la (9.3) $2^{ip} * d_{id} - \Delta = 3^{id} * d_0$ possiamo scrivere:

(9.6) $2^{ip-1} * d_{id} < 2^{ip} * d_{id} - \Delta$

ed essendo $2^{ip} - 2^{ip-1} = 2^{ip-1}$ possiamo dedurne che $\Delta < 2^{ip-1} * d_{id}$ e quindi anche che $\Delta < 3^{id} * d_0$ e che quindi infine è possibile trascurare Δ rispetto a $3^{id} * d_0$.

Questo ci consente di scrivere con buona approssimazione l'eguaglianza della (9.5) nel modo seguente:

(9.7) $\frac{3^{idy} * d_0}{2^{ipy}} \approx \frac{3^{idx} * d_0}{2^{ipx}} \quad \Longrightarrow \quad 3^{idy-idx} \approx 2^{ipy-ipx}$

uguaglianza quest'ultima che discende anche dalla (8-9) sottraendo la ipx dalla ipy e ponendo la differenza ad esponente della potenza di due:

(9.8) $2^{ipy-ipx} \approx \frac{d_{idx}}{d_{idy}} * 3^{idy-idx} \quad \Longrightarrow \quad 3^{idy-idx} \approx 2^{ipy-ipx}$

in base alla ipotesi iniziale $d_{idy} = d_{idx}$. Ma questa eguaglianza risulta impossibile a meno che i due esponenti della (9.7) non siano pari a zero e cioè idy=idx e ipy=ipx, condizione questa inesistente per due nodi distinti dell'orbita. L'approssimazione della (9.8) non inficia il ragionamento in quanto la differenza tra le due potenze cresce in media molto rapidamente al crescere dell'esponente di 3, ricavando dalla 8.9 quello del 2.

Di conseguenza l'ipotesi $d_y = d_x$ è falsa ed il teorema dimostrato.

Osservazione 9.9 Si perverrebbe alla stessa formula (9.7) qualora calcolassimo idy ed idx a partire dalla formula (5.4) che per ogni nodo K_i dell'orbita fornisce la relazione approssimata tra l'uscita d_i e l'ingresso d_{i-1}:

(9.9) $d_i = (3d_{i-1} + 1)/2^{k_i} \approx 3d_{i-1}/2^{k_i}$

Infatti reiterando questa formula, a partire da d_0, per gli id nodi dell'orbita $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$, otterremo:

(9.10) $d_{id} \approx 3^{id} * d_0/2^{ip}$

dove id è l'indice del nodo k_{id} della successione $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ ed ip è la somma dei vari k_i della (9.9) intercorsi tra d_0 e d_{id}. Da qui in poi, considerando due nodi qualsiasi dell'orbita $\{d\}_{n \, \varepsilon \, N}$ pari rispettivamente a d_{idx} e d_{idy}, con idy > idx, la trattazione è analoga a quella svolta precedentemente dalla (9.7) in poi.

10 Validità della congettura di Collatz

Avendo dimostrato (4) che la successione $\{a\}_{n \, \varepsilon N}$ giunge sempre ad 1 se vi giunge anche la successione equivalente $\{d\}_{n \, \varepsilon N}$ e che quest'ultima giunge sempre ad 1 in quanto:

a) la successione è superiormente limitata (7) e quindi non esiste alcun numero dispari d per cui la successione tende ad infinito

b) fino al nodo dell'orbita pari ad 1 non ci sono in essa numeri che si ripetono senza mai dare 1 (9) e quindi nessun termine della successione $\{d_n\}_{n \, \varepsilon N}$ è uguale ad un suo termine precedente

risulta dimostrata la congettura di Collatz

ALLEGATOO   A

Numero di volte consecutive che il termine 3di+1, a partire da quello iniziale che attraversa il processo INC, è divisibile solo per 2
h=numero di volte; d=densità calcolata rispetto ai numeri dispari dell'insieme D1

h=1 diƐD1: d1=(3di+1)/2; d=1/2	h=2 d2=(3d1+1)/2; d=1/4	h=3 d3=(3d2+1)/2; d=1/8	h=4 d4=(3d3+1)/2; d=1/16	h=5 d5=(3d4+1)/2; d=1/32	h=6 d6=(3d5+1)/2 d=1/64	
3	5					
7	11	17				
11	17					
15	23	35	53			
19	29					
23	35	53				
27	41					
31	47	71	107	161		
35	53					
39	59	89				
43	65					
47	71	107	161			
51	77					
55	83	125				
59	89					
63	95	143	215	323	485	
67	101					
71	107	161				
75	113					
79	119	179	269			
83	125					
87	131	197				
91	137					
95	143	215	323	485		
99	149					
103	155	233				
107	161					
111	167	251	377			
115	173					
119	179	269				
123	185					
127	191	287	431	647	971	1457

BIBLIOGRAFIA

[a] Terence Tao - Quasi tutte le orbite di Collatz raggiungono valori quasi limitati:
https://terrytao.wordpress.com/2019/09/10/almost-all-collatz-orbits-attain-almost-bounded-values/

[b] Mirko Degli Esposti - La congettura di Collataz:
https://amslaurea.unibo.it/6334/1/Collatz.pdf