Aldo Pappalepore
aldo.pappalepore@libero.it

Investigation of Hardy-Littlewood conjecture with the primality theorems of Congruence and of Complementary Congruence and with the density of incongruous and incompcongruous numbers

Indagine sulla congettura di Hardy-Littlewood con i teoremi di primalità della Congruenza e della Congruenza Complementare e con la densità dei numeri incongrui ed incompcongrui

Abstract

This article provides novel insights on Hardy-Littlewood's conjecture (infinity and distribution of twin primes); this work is primarily based on two primality theorems of congruence and of compcongruence. Study results in demonstration of Hardy-Littlewood conjecture and, in addition to the results achieved, opens up new areas of possible research in the field of number Theory.

Nell'articolo viene sviluppato uno studio sulla congettura di Hardy-Littlewood (infinità e distribuzione dei primi gemelli; esso è basato prioritariamente sui due teoremi di primalità della congruenza e della compcongruenza. Lo studio perviene alla dimostrazione della congettura di Hardy-Littlewood e, oltre ai risultati raggiunti, apre nuovi ambiti di possibile ricerca nel campo della Teoria dei numeri.

1 I numeri Primi Gemelli e la congettura di Hardy-Littlewood

Come noto i numeri primi gemelli sono quelli che distano tra loro di 2 unità (tranne la coppia 2-3) come per esempio 17-19, 71-73, 521-523, 6359-6361, etc.

La congettura di Hardy-Littlewood afferma che i primi gemelli sono infiniti.

1.1 I numeri Pari Gemelli

Ogni numero primo maggiore di 2, come del resto ogni numero dispari, può essere scritto come la somma o la differenza di un numero pari e di 1. Nel caso di una coppia di primi gemelli ci sarà ovviamente un unico numero pari che sommato a 1 e sottratto di 1 darà luogo ai primi gemelli della coppia.

Chiamiamo Pari Gemello ed indichiamo con il simbolo PG ogni numero pari n ∈ N tale che n+1 ed n-1 siano numeri primi.

1.2 Il teorema dei Pari Gemelli

Definizione 1.2.1 *$\forall$ $n_0 \in N$, pari e maggiore di 4, con $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(n_0+1)}$, condizione necessaria e sufficiente affinché n_0+1 ed n_0-1 siano primi gemelli è che $n_0 \not\equiv 1 (mod\, p_i)$ ed $n_0 \nparallel 1$[1] $(mod\, p_i)$ $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ oppure che $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ sia un insieme vuoto.*

DIM. Dai due teoremi di Primalità (1.2.1 ed 1.4.1 [c]) ponendo $N_0 = n_0$ ed $n_0 = 1$ discende che, se 1 é incongruo ed incompcongruo con n_0 moduli p_i $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$, e di conseguenza $\forall p_i \in$

[1] I simboli $\not\equiv$ e $\nparallel$ stanno ad indicare la non congruità e la non compcongruità tra due numeri da: Congruenza, Primalità e Densità di Aldo Pappalepore

$\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0-1)}\right)$ essendo $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0-1)}\right) \subseteq \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$, oppure se $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ è un insieme vuoto, n_0+1 ed n_0-1 sono primi gemelli.
Viceversa se n_0+1 ed n_0-1 sono primi gemelli vuol dire che non sono divisibili per nessun primo minore o uguale della $\sqrt{(n_0+1)}$ e che quindi, sempre per la (1.2.1) ed (1.4.1), n_0 ed 1 sono incongrui ed incompcongrui $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ e quindi $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0-1)}\right)$.
Si è posto $n_0 \geq 4$ in quanto con $n_0 = 2$ si avrebbe che $n_0 - 1 = 1$ che, come si sa, non è un numero primo e neanche uno composto.

Se invece di riferirci all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ ci riferiamo, per esigenze di dimostrazioni successive, all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{N_0}\right)$ con $N_0 \in N$ e maggiore di n_0, il teorema (3.2.1) si trasforma nel seguente corollario:

Corollario 1.2.2 *$\forall N_0, n_0 \in N$, con $N_0 \geq 9$ e con n_0 pari e $p_{max} < n_0 < N_0$, con $\mathbb{P}\left(\sqrt{N_0}\right)$ insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(N_0)}$ e con p_{max} numero primo più alto di $\mathbb{P}\left(\sqrt{N_0}\right)$, condizione necessaria e sufficiente affinché n_0+1 ed n_0-1 siano primi gemelli è che $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{N_0}\right)$ 1 sia un numero incongruo ed incompcongruo di n_0.*

Dim. Sostituendo $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ a $\mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0+1)}\right)$ i numeri n_0 pari minori di p_{max} e tali che $n_0 \pm 1 = p_j$, con $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, non vengono considerati in quanto, per lo stesso $p_j \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, presentano una classe di congruenza mod p_j uguale e/o complementare a quella di pari modulo di 1. Infatti se $n_0 \pm 1 = p_j$ in base all'aritmetica modulare si avrà sempre che $[n_0]$ mod $p_j \pm [1]$ mod $p_j = [p_j]$ mod $p_j = [0]$ da cui discende la congruenza e/o la compcongruenza mod p_j di 1 con n_0.
Viceversa se n_0+1 ed n_0-1 sono primi gemelli maggiori di p_{max} e minori di N_0 vuol dire sia che, in base alla (1.2.1) ed alla (1.4.1), n_0 ed 1 sono incongrui ed incompcongrui $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0 \pm 1)}\right)$, ma anche che, non essendo n_0+1 ed n_0-1, in quanto primi, divisibili per nessun primo minore o uguale della $\sqrt{(N_0)}$, n_0 ed 1 sono incongrui ed incompcongrui anche $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$.
Si è posto $N_0 \geq 9$ in quanto per valori inferiori p_{max} non sarebbe definito.

Giacché nell'intervallo $]0, N_0]$, con $N_0 \geq 9$ ed $n_0 > p_{max}$ esiste sempre almeno un primo (osservazione 1.2.5 [c])), sicuramente esisteranno sempre un n_{01} ed un n_{02} di cui 1 è incongruo ed incompcongruo; ma per dimostrare la congettura di Hardy-Littlewood bisogna appurare sia che esiste almeno un $n_0 = n_{01} = n_{02}$, e cioè un numero Pari Gemello (PG), minore di N_0, di cui 1 è incongruo ed incompcongruo modulo p_i per tutti gli p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{N_0})}\right)$, sia che per $N_0 \to \infty$ anche il numero di PG tende ad infinito con una relazione ben precisa.
A tal fine ricorriamo allo studio della densità dei pari gemelli.

1.3 La densità dei pari gemelli

Tutti gli n_0 che soddisfano le condizioni del corollario (1.2.2) sono pari gemelli PG che presentano le seguenti caratteristiche:

- la classe di PG modulo 2, essendo PG pari, è sempre uguale a zero mentre la classe di 1 modulo 2 è sempre 1 (con complemento pari a 1) e di conseguenza 1 sarà sempre incongruo ed incompcongruo con PG modulo 2
- le classi di PG di modulo successivo (3, 5, 7, 11, etc.) presenti in $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ non devono essere uguali alle classi di 1 ed ai loro complementi p-1 dello stesso modulo (*per esempio se PG=18 ed $N_0 = 24$ si ha che $\mathbb{P}(\sqrt{N_0})$ = {3}; $[18]_{mod3} = 0$ e il suo complemento è ancora uguale a 0, $[1]_{mod3} = [1]$ e il suo complemento è uguale a 2 e pertanto 1 risulta incongruo ed incompcongruo con PG per cui 18+1 e 18-1 risultano primi gemelli*).

Ciò detto vediamo come calcolare il numero dei PG e quindi delle coppie di pari gemelli minori di un $N_0 \geq 49$, condizione questa (vedi osservazione 1.7.1 [c])) derivante dalla necessità che N_0 appartenga all'intervallo]0, p_{max}#] dove p_{max} è il numero primo più alto minore o uguale della $\sqrt{(N_0)}$.
Selezionato allora un $N_0 \geq 49$ qualsiasi indichiamo con p_{max} il numero primo più alto di $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$. Consideriamo quindi l'intervallo/tabella dei numeri naturali]0, p_{max}#] ed eliminiamo ora da questa tabella le righe che presentano: classe di congruenza mod 2 uguale a [1]; classi di congruenza dei moduli successivi (3, 5, ….. , p_{max}) uguali alle classi di 1 ed ai loro complementi p-1 per gli stessi moduli.
I numeri **M** della Tabella numeri-classi p_{max}, non eliminati attraverso il precedente crivello, possono essere allora solo quelli che nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza presentano la sola classe [0] delle due possibili classi di congruenza mod 2 ed una delle p_i -2 (per ogni p_i appartenente all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$) possibili classi di congruenza dei moduli successivi (3, 5, ….. , p_{max}) con l'esclusione cioè delle classi 1 e (p-1) per gli stessi moduli (se per es. (M) mod7 = 1 con complemento = 6, M non sarà un Pari Gemello essendo anche (1) mod7=1 con complemento = 6; per esserlo è necessario che (M) mod7 sia uguale ad una delle 5 (7-2) possibili altre classi di congruenza: 0,2,3,4,5)

Le righe (combinazioni di classi) della tabella non cancellate allora, in base al calcolo combinatorio, risulteranno essere:

(1.3.1) $\prod_{p=3}^{p_{max}}(p-2)$

La (1.3.1) ci fornisce quindi la quantità dei numeri **M** della tabella-intervallo]0, p_{max}#] dei quali 1 **non è congruo e non è compcongruo per i soli moduli p_i** appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$ mentre nulla possiamo dire circa la eventuale (non) congruenza e (non) compcongruenza di 1 con questi numeri relativamente agli altri moduli p_j maggiori di p_{max} ed appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(pmax\#)}\right)$. In base al corollario (1.2.2) però possiamo affermare che tutti i numeri **M minori di N_0**, che indicheremo con **PG_{N0}**, essendo non congrui e non compcongrui con 1 per tutti i moduli p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, sono numeri Pari Gemelli. Indichiamo con $Dncncomp(PG)_{N0}$ la loro densità nell'intervallo]0, N_0].

Osservazione 1.3.2 *Per lo stesso corollario (1.2.2) sappiamo però anche che tali numeri M(PG), di cui 1 non è congruo e non è compcongruo relativamente ai moduli $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, non comprendono i PG relativi alle coppie di primi gemelli minori della $\sqrt{N_0}$ e conseguentemente la loro densità media $Dncncomp(PG)_{N0}$ sarà sempre minore di quella Dpg_{N0} di tutti i Pari Gemelli PG_{N0} minori di N_0.*

Calcoliamo ora la densità dei numeri PG esistenti nell'intervallo]0, p_{max}#] di cui 1 è non congruo e non compcongruo per i moduli p_i appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$, ed indichiamo questa densità con $Dncncomp_{]0,\ p_{max}\#]}$ o con $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{(N_0)}\#]}$ essendo $\sqrt{(N_0)}\# = p_{max}\#]$. Sapendo quindi che $p_{max}\# = 2*3*…….* p_{max}$, si può scrivere:

(1.3.3) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{(N_0)}\#]} = \frac{\prod_{p=3}^{pmax}(p-2)}{\prod_{p=2}^{pmax} p} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{p}$

moltiplicando e dividendo il secondo termine della stessa per (p-1) otteniamo:

(1.3.4) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{(N_0)}\ \#]} \ = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{p} * \frac{(p-1)}{(p-1)} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-1)}{p} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)} = \prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p} \ * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)}$

nell'ultimo membro della (1.3.4) abbiamo sostituito a $\frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}$ il termine $\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}$ che, come sappiamo dalla (2.2.2 [c]), corrisponde, sempre per $N_0 \geq 49$, alla Densità media $Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\ \#]}$ dei numeri M esistenti nell'intervallo]0, p_{max}#] **non congrui di N_0 per i soli moduli p_i** appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(N_0)}\right)$; in queste ultime tre formule p_{max} è il numero primo più alto minore o uguale della $\sqrt{(N_0)}$.
Vediamo allora se riusciamo a trovare una relazione tra $\prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)}$ e $\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}$ in modo da poter determinare il valore di $Dncncomp_{]0,\ p_{max}\ \#]}$ in funzione di $Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\ \#]}$.

Possiamo scrivere:

(1.3.5) $\frac{\prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)}}{\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}} = \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)} * \prod_{p=2}^{pmax} \frac{p}{(p-1)} = \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)} * 2 * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{p}{(p-1)} = 2 * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{p*(p-2)}{(p-1)^2}$

e sostituendo la (1.3.5) nella (1.3.4):

(1.3.6) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{(N_0)}\ \#]} \ = \prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p} \ * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{(p-1)} = 2 * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{p*(p-2)}{(p-1)^2} * \left(\prod_{p=2}^{pmax} \frac{(p-1)}{p}\right)^2$

da cui in base alla (2.2.2 [c]):

(1.3.7) $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{(N_0)}\ \#]]} \approx 2 * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{p*(p-2)}{(p-1)^2} * (\ Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\ \#]})^2$

Dalla (1.3.7) si ricava il rapporto tra la densità $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{(N_0)}\ \#]}$ dei numeri incongrui ed incompcongrui con 1 nell'intervallo]0. $\sqrt{N_0}$ #] ed il quadrato di quella nello stesso intervallo dei numeri incongrui con N_0.

(1.3.8) $\frac{Dncncomp_{]0,\ \sqrt{(N_0)}\ \#]}}{(\ Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\ \#]})^2} \approx 2 * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{p*(p-2)}{(p-1)^2}$

Ora si può facilmente verificare che il termine $\prod_{p=3}^{pmax} \frac{p*(p-2)}{(p-1)^2}$ per N_0=49 assume il valore 0,68359375, per N_0=9006001 il valore 0,6601862196 per poi, al crescere di N_0 verso infinito, e quindi estendendo il prodotto su tutti i numeri primi ≥ 3, tendere rapidamente a decrescere verso la costante dei primi gemelli C_2 che compare nella congettura di Hardy-Littlewood ([d]) sulla distribuzione dei primi gemelli:

$\prod_{p\geq 3} \frac{p*(p-2)}{(p-1)^2}$ = $C_2 \approx$ 0,66016118138468695739278121100014 ……….

Possiamo quindi scrivere:

(1.3.9) $\frac{Dncncomp_{]0,\ \sqrt{(N_0)}\ \#]}}{(\ Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\ \#]})^2} \approx 2*C_2$

Giacché:

- il rapporto $2C_2$ tra $Dncncomp_{]0,\ \sqrt{(N_0)}\#]}$ ed il quadrato di $Dnc_{]0,\ \sqrt{N_0}\#]}$ cambia poco al variare di N_0 e quindi di $\sqrt{N_0}\ \#$
- la relazione tra i primi gemelli ed i numeri primi dipende solo dalla distribuzione di questi ultimi e cioè da $\prod_{p=2}^{p_{max}} \frac{(p-1)}{p}$ = $Dnc_{]0,\sqrt{N_0}\#]}$
- il crivello che determina i numeri n_0 con cui 1 è incongruo ed incompcongruo non dipende né da N_0 né da $\sqrt{N_0}\#$ ma solo dalla incongruenza ed incompcongruenza di 1 con tali n_0 $\forall p_i \in \mathbb{P}\left(\sqrt{(n_0 \pm 1)}\right)$

si può ritenere con buona approssimazione che il rapporto (1.3.9) sia valido per ogni intervallo]0, N] e quindi in particolare anche per l'intervallo]0, N_0] e che quindi sia corretto scrivere:

(1.3.10) $Dncncomp_{]0,\ N_0]} \approx 2*C_2*(\ Dnc_{]0,N_0]]})^2$

Osservazione 1.3.11 *Nella (1.3.10) come riportato nelle Osservazioni (1.3.2) e (2.2.6 [c]) sia* $Dncncomp_{]0,\ N_0]}$ *che* $Dnc_{]0,N_0]]}$ *non comprendono i possibili* n_0 *per i quali* $n_0 \pm 1$ *sono uguali ai primi minori o uguali alla* $\sqrt{(N_0)}$ *ma giacché questa relazione è sempre valida* $\forall N_0 \in N$ *a partire da* $N_0 = 49$ *possiamo estendere la (*1.3.10*) a tutti i numeri* n_0 *di cui 1 risulta non congruo e non compcongruo e che sommati o sottratti ad 1 danno come risultato i primi (ad eccezione di 2, 3, 5, 7) minori a qualsiasi* N_0 *maggiore di 49. Infatti per* $N_0 = 49$ *(e quindi* $\sqrt{49} = 7$*) la (*1.3.10*)* riguarda tutti gli n_0 di cui 1 è *non congruo e non compcongruo* che sottratti e sommati ad 1 danno come risultato i primi gemelli compresi tra *tra 8 e 49; per* $N_0 = 121$ *(e quindi* $\sqrt{121} = 11$*) la (*1.3.10*) riguarda i primi gemelli compresi tra 12 e 121; per* $N_0 = 169$ *(e quindi* $\sqrt{169} = 13$*) la (*1.3.10*) riguarda i primi gemelli compresi tra 14 e 169; e possiamo continuare così per tutti i successivi* N_0 *uguali ai quadrati dei primi successivi a 13.*

Ma si può verificare, ponendo N_0=49 e quindi C_2=0,6835, che la (1.3.10) con una approssimazione di circa il 5%, sussiste anche prendendo in considerazione i primi 2, 3, 5, 7. Infatti con N_0=49 si contano 15 primi e 6 pari gemelli donde, indicando con $\mathrm{Dpg}_{\mathrm{N0}}$ la densità dei pari gemelli minori di 49, si ha:

$$\mathrm{Dpg}_{\mathrm{N0}} = \frac{6}{49} = 0{,}1224$$

mentre per la (1.3.10):

$$Dncncomp_{]0,\ N_0]} \approx 2*0{,}6835*\left(\frac{15}{49}\right)^2 \approx 0{,}1281$$

da cui:

$$Dncncomp_{]0,\ N_0]} \approx \mathrm{Dpg}_{\mathrm{N0}}$$

Ovviamente al crescere di N_0, ferma restando la validità della (1.3.10) per tutti i primi maggiori di 7, l'approssimazione diminuisce.

In definitiva possiamo allora ritenere che $\forall N_0 \in N$ maggiore di 49 la (1.3.10) è valida per tutti i primi minori di N_0 e quindi, sostituire Dpg_{N0} al posto di $Dncncomp_{]0,\ N_0]}$ e $Dprimi_{]0,\ N_0]}$ al posto di $Dnc_{]0,\ N_0]}$ (vedi (2.2.4) [c]), scrivendo:

(1.3.11) $Dpg_{N0} \approx 2*C_2*(Dprimi_{]0,\ N_0]})^{2}$

Essendo poi per il TNP $Dprimi_{]0,\ N_0]} = \frac{1}{logN_0}$ si può scrivere:

(1.3.12) $Dpg_{N0} \approx 2*C_2*(\frac{1}{logN_0})^{2}$

e moltiplicando ambo i membri per N_0:

(1.3.13) $PG_{N0} \approx N_0*2*C_2*(\frac{1}{logN_0})^2$

Per $N_0 = 49$ la (1.3.13) PG_{N0} assume un valore maggiore di 5 ed, essendo $N_0*(\frac{1}{logN_0})^2$ una funzione crescente con N_0, PG_{N0} crescerà sempre al crescere di N_0 tendendo all'infinito con una distribuzione **(**1.3.12**)** uguale a quella prevista dalla congettura di Hardy-Littlewood [(d)]:

$\pi_2(x) \approx x*2*C_2*(\frac{1}{logx})^2$

I pari gemelli, e cioè le coppie di primi gemelli, sono pertanto infiniti e la (1.3.12) è la loro legge di distribuzione.

BIBLIOGRAFIA

[a] Alessandro Zaccagnini - Introduzione alla Teoria Analitica dei Numeri:
http://people.dmi.unipr.it/alessandro.zaccagnini/psfiles/lezioni/tdn2005.pdf

[b] Francesco Fumagalli - Appunti di Teoria elementare dei numeri:
Teoria_dei_Numeri.pdf (unifi.it)

[c] Aldo Pappalepore – Congruenza, Primalità e Densità:
https://www.aldopappalepore.it/_downloads/394a65a2c2c6bc8a27c5aab800f93b84

[d] HARDY-LITTLEWORD - La congettura dei primi gemelli:
Wikizero - Congettura dei numeri primi gemelli