Aldo Pappalepore
aldo.pappalepore@libero.it

INDAGANDO SULL’ULTIMO TEOREMA DI FERMAT CON UNA ESTENSIONE DELLE TERNE PITAGORICHE

Abstract

This article provides novel insights on Fermat's last theorem based primarily on an extension of the Pythagorean triples and their diagram. The study arrives at a trivial proof of Fermat's last theorem and opens up possible new fields of research in the field of algebraic equations.

Premessa

L'ultimo teorema di Fermat, o più correttamente l’ultima congettura di Fermat afferma che non esistono soluzioni intere positive dell'equazione:

$x^n + y^n = z^n$

se $n > 2$ e se $xyz <> 0$.

Fermat formulò l'enunciato nel 1637, ma non rese nota la dimostrazione che diceva di aver trovato. Solamente nel 1994 la congettura fu dimostrata da Andrew Wiles attraverso l’uso di elementi di matematica e di algebra moderna che Fermat a quel tempo non poteva conoscere; pertanto la dimostrazione di Fermat, se esistente e corretta, non poteva che essere diversa.

Il Diagramma delle terne pitagoriche

L’equazione dell’ultimo teorema di Fermat si può considerare una estensione delle terne pitagoriche

$x^2 + y^2 = z^2$

che come sappiamo sono infinite pur escludendo le soluzioni banali.

E’ proprio dallo studio di queste equazioni e da un’estensione delle stesse ad esponenti maggiori di 2 che si è individuato come utile strumento il Diagramma delle terne pitagoriche. Esso è costituito da un piano cartesiano in cui sull’asse delle ascisse ci sono gli interi positivi k e ad ogni colonna della sua griglia verticale viene associato in modo crescente un intero positivo dispari a partire da 1 (fig. 1).

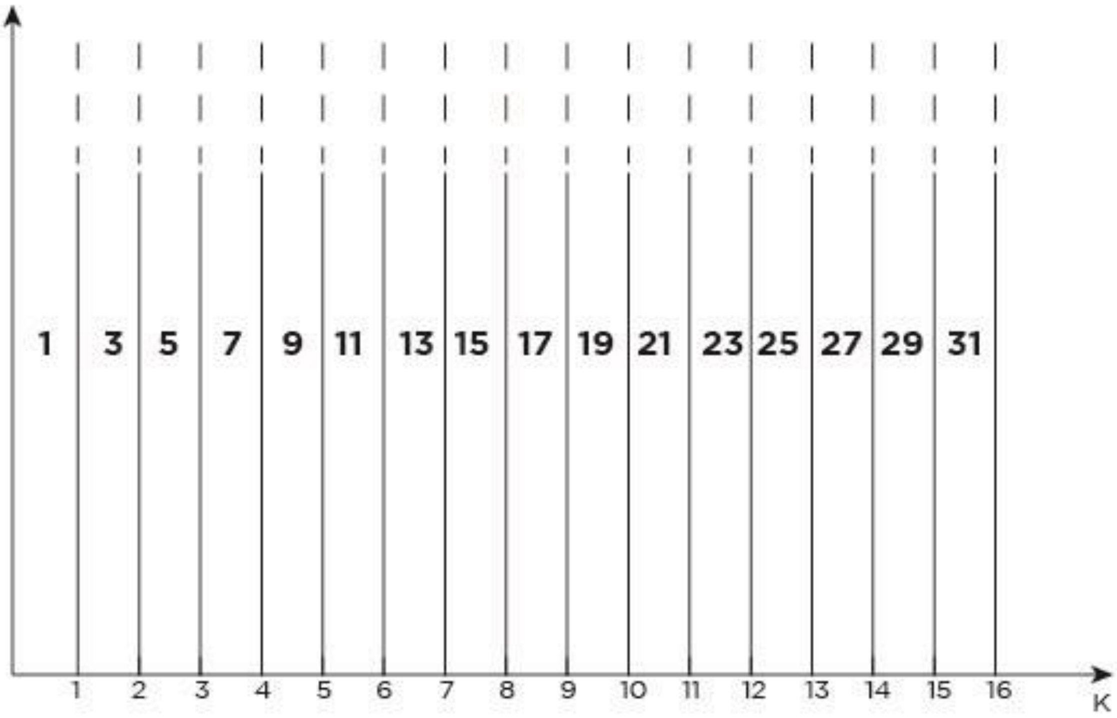

fig. 1 – Diagramma delle terne pitagoriche

Dall’analisi del Diagramma in figura possiamo ricavare che:

a) il valore di ogni colonna compresa tra k e k’=k+1 è pari a 2k+1, 2k’-1 e k+k’
b) la somma dei valori di tutte le colonne comprese tra 0 e k è pari a k^2
c) di conseguenza la somma dei valori delle colonne comprese tra k_1 e k_2 ($\sum_2$-$\sum_1$), con $k_2 > k_1$, è pari a $k_2^2 – k_1^2$ (vedi fig. 2).

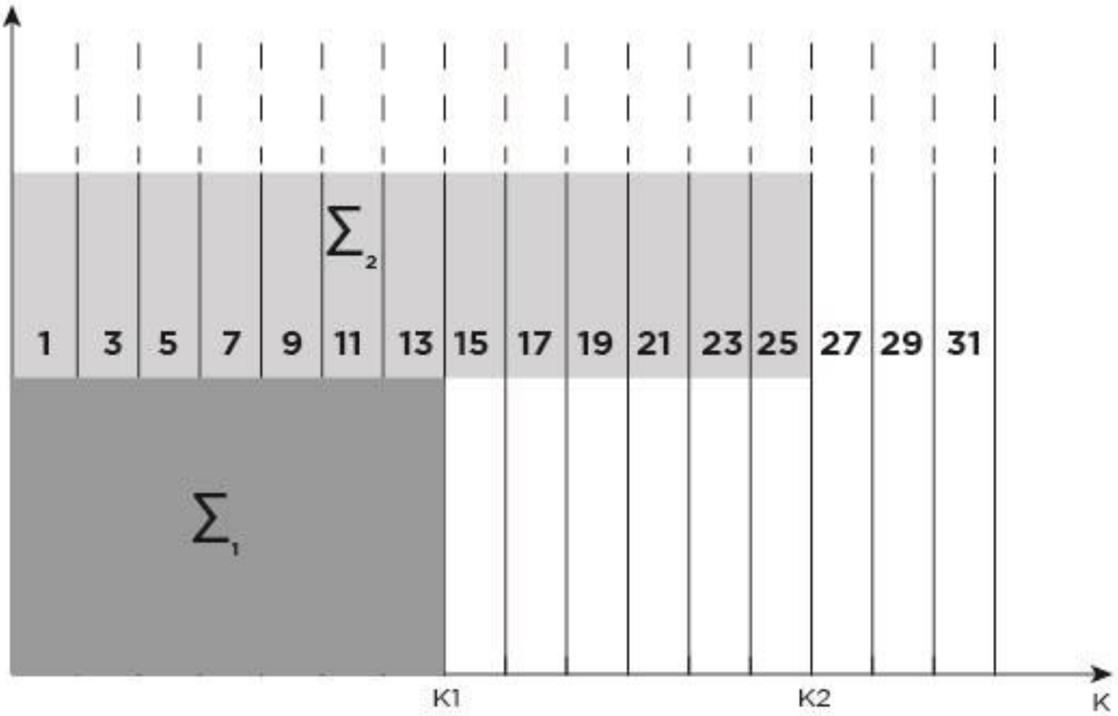

fig. 2 – $\Sigma_2 - \Sigma_1 = k_2^2 - k_1^2$

d) alla somma dei valori di una emmupla (con m>1) dispari di colonne corrisponde sempre un numero dispari composto:

infatti se l'emmupla è centrata sulla colonna di valore 1+2k, la somma dei suoi valori assumerà l'espressione:

$$
\begin{aligned}
(1 + 2k) + {} & [(1 + 2k) -2] + [(1 + 2k) + 2] + \\
& [(1 + 2k) -4] + [(1 + 2k) + 4] + \\
& [(1 + 2k) -6] + [(1 + 2k) + 6] + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& \underline{[(1 + 2k) -((m-1)/2)*2] + [(1 + 2k) + ((m-1)/2)*2]} =
\end{aligned}
$$

$$(1 + 2k) + (m-1)*(1 + 2k) = m*(1 + 2k) = m*(1 + 2k)$$

dove n = m*(1 + 2k) è sicuramente un numero non primo dispari per il quale si hanno tante ennuple diverse la cui somma di valori è pari ad n, quanti sono tutti i possibili prodotti uguali ad n di due numeri naturali distinti [m e (1+2k)]. Essendo m un numero dispari qualsiasi e k un intero positivo qualsiasi, si ha che per ogni numero intero positivo dispari composto n esisteranno sempre una o più ennuple le cui somme di valori sono uguali ad n e quindi una o più coppie di valori k_2, k_1 tali che $n = k_2^2 – k_1^2$. Per ogni numero primo p invece non esiste alcuna emmupla (con m>1) la cui somma di valori sia uguale a p ma c'è sempre una sola colonna (tra k_2 e k_1) di valore pari a p e quindi esistono anche in questo caso due valori k_2, k_1 tali che $p = k_2^2 – k_1^2$ dove $k_2 = (p+1)/2$ e $k_1 = (p-1)/2$.

e) alla somma dei valori di una emmupla pari di colonne corrisponde sempre un numero pari composto di 4:

infatti se l'emmupla è centrata sulle due colonne di valore 2k-1 e 2k+1, la somma dei suoi valori assumerà l'espressione:

$$\begin{aligned} 4k + {} & [(2k - 1) -2] + [(2k + 1) + 2] + \\ & [(2k - 1) -4] + [(2k + 1) + 4] + \\ & [(2k - 1) -6] + [(2k + 1) + 6] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ + \\ & \underline{[(2k - 1) - ((m-2)/2)*2] + [(2k + 1) + ((}m-2)/2)*2] = \end{aligned}$$

$$4k + ((m-2)/2)(2k-1) + ((m-2)/2)(2k+1) \ = 4k + (m-2)2k=2km$$

ed, essendo m pari, la somma sarà del tipo 4km' con m'=m/2. Di conseguenza solamente i numeri n interi positivi pari multipli di 4 presentano una o più ennuple diverse le cui somme di valori sono uguali ad n e quindi una o più coppie di valori k_2, k_1 tali che $n = k_2^2 – k_1^2$.

In base a quanto sopra scritto possiamo affermare che al termine n^2, essendo questo o un numero dispari composto o un numero pari multiplo di 4, è sempre possibile associare una o più coppie di valori k_2, k_1 tali che $n^2 = k_2^2 – k_1^2$. Ponendo quindi n=b, $k_2 = c$ e $k_1 = a$ per ogni intero positivo b esistono una o più coppie di interi positivi a e c tali che si può scrivere:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

In definitiva si può affermare che per ogni numero naturale b esistono una o più terne pitagoriche con lo stesso intero b.

Estensione delle terne pitagoriche

Se nel Diagramma delle terne pitagoriche, fig. 3, selezioniamo una emmupla compresa tra 0 ed h ed un valore l successivo (l > h) e facciamo traslare la emmupla da 0 a l in modo da occupare le colonne comprese tra l e l+h, la somma dei valori delle colonne della emmupla traslata ci sarà data da:

1) $C_{(h,l)} = h^2 + 2lh$

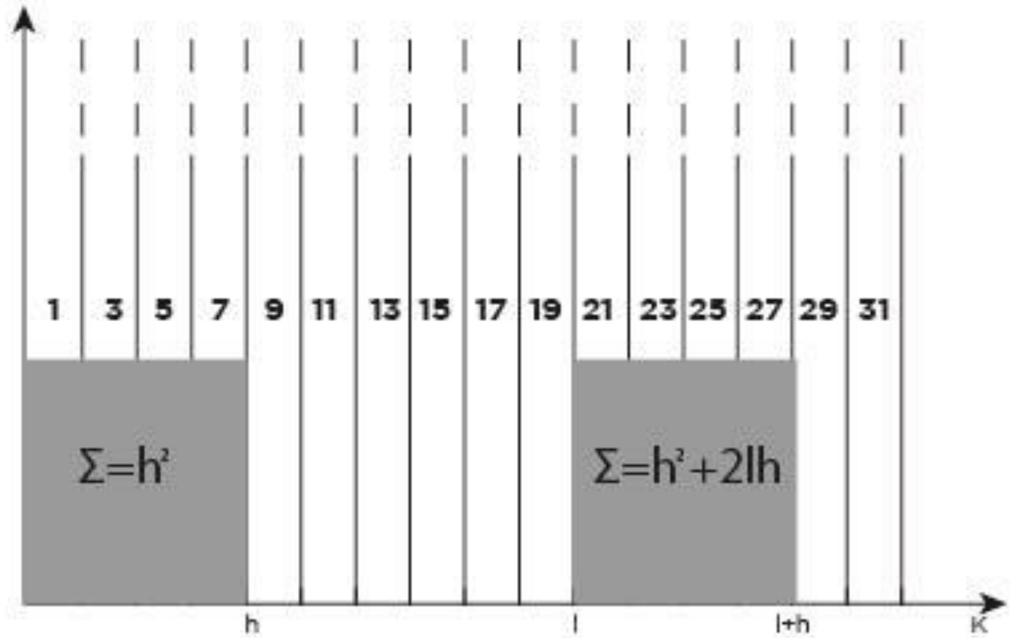

Fig. 3 – traslazione di una emmupla da 0 ad l

Al variare di l, se h è dispari, $C_{(h,l)}$ ci fornisce tutti i numeri composti dispari di h maggiori del suo quadrato e quindi tra questi anche, $\forall$ n $\in$ N ed n maggiore di 2, la potenza h^n.
Se invece h è pari $C_{(h,l)}$ ci fornisce tutti i numeri composti pari, multipli di 4 di h e maggiori del suo quadrato e quindi tra questi anche, $\forall$ n $\in$ N ed n maggiore di 2, la potenza h^n, che essendo h pari ed n>2, sarà sicuramente un multiplo di 4.

Possiamo allora desumere che per ogni $Y = y^n$ con y ed n appartenenti ad N e con n naturale maggiore di 2 si hanno tante ennuple diverse, la cui somma di valori è pari ad Y, quanti sono tutti i possibili prodotti uguali ad Y di due numeri naturali distinti (fattori o prodotti di fattori di Y), ed in particolare di y ed y^{n-1}. Di conseguenza si avranno le seguenti uguaglianze:

2) $Y = C_{(y,ly)} = y^2 + 2l_y y$

dove l_y rappresenta il valore iniziale l della ennupla (0,y) traslata; ed

3) $Y = C_{(f,lf)} = f^2 + 2l_f f$

dove f e l_f rappresentano rispettivamente un fattore (o prodotto di fattori) di Y ed il valore iniziale l_f della ennupla (0,f) traslata.

La congettura di Fermat

La congettura, come già scritto, afferma che non esistono soluzioni intere positive dell'equazione:

4) $x^n + y^n = z^n$

se n > 2 e se xyz <> 0

o, in modo equivalente, che non esistono soluzioni intere positive dell'equazione:

5) $z^n – x^n = y^n$

sempre se n > 2 e se xyz <> 0

Supponiamo per ipotesi che la congettura sia falsa *per n pari* e cioè che *per n pari e maggiore di 2* esista almeno una terna di valori interi positivi x, y, z tali per cui l'equazione $z^n – x^n = y^n$ abbia almeno una soluzione.

Ora con n intero pari maggiore di 2, $z^{n/2}$ ed $x^{n/2}$ sono interi positivi e per qualsiasi coppia z, x la somma dei valori delle colonne della emmupla compresa tra $z^{n/2}$ ed $x^{n/2}$ nel diagramma delle terne quadratiche sarà un numero composto dispari (non potendosi verificare che $z^{n/2}$ - $x^{n/2}$ sia uguale ad 1) o un numero pari multiplo di 4 che indicheremo con Y. Cioè avremo $Y = (z^{n/2})^2 - (x^{n/2})^2 = z^n – x^n$.

Se, in base alla ipotesi, $Y=y^n$ avremo che $Y=y*y^{n-1}$ è un composto di y ed, in base alla legge dei numeri composti nel diagramma delle terne quadratiche (per cui ogni composto di y superiore al suo quadrato y^2 sarà dato dalla somma di y valori colonnari relativi ad una sequenza di origine l > 0) possiamo scrivere: $y = z^{n/2} - x^{n/2}$.

Allora, essendo per costruzione $y = z^{n/2} - x^{n/2}$ ed $Y = z^n – x^n$, ed essendo per ipotesi $Y = y^n$ si ha:

$z^n – x^n = (z^{n/2} - x^{n/2})^n$ e quindi:

$(z^{n/2} - x^{n/2})* (z^{n/2} + x^{n/2}) = (z^{n/2} - x^{n/2})* (z^{n/2} - x^{n/2})^{n-1}$

e dividendo ambo i membri per $(z^{n/2} - x^{n/2})$ si ha:

6) $(z^{n/2} + x^{n/2}) = (z^{n/2} - x^{n/2})^{n-1}$

Dimostriamo ora che la 6), per qualsiasi coppia di valori $z^{n/2}$ $x^{n/2}$ (con n > 2 ed xz <> 0), risulta errata in quanto risulta sempre come vedremo:

7) $(z^{n/2} + x^{n/2}) < (z^{n/2} - x^{n/2})^{n-1}$

Cominciamo col dire che con n *pari* > 2, n-1 non sarà mai minore di 2 e risulterà sempre $| z^{n/2} - x^{n/2}| > 2$.

Ciò detto essendo:

$(z^{n/2} - x^{n/2})^{n-1} = (z^{n/2} - x^{n/2})^2*(z^{n/2} - x^{n/2})^{n-3}$

la 7) risulterà sempre vera essendo valida, nelle condizioni date di n *pari* > 2 e di $| z^{n/2} - x^{n/2}| > 2$, la disequazione:

8) $(z^{n/2} + x^{n/2}) < (z^{n/2} - x^{n/2})^2$

Si può facilmente verificare come mettendoci nelle condizioni di minima differenza tra i due membri della 8), e cioè n=4 e z=x+1, risulta:

$(z^{n/2} - x^{n/2})^2 = 2*(z^{n/2} + x^{n/2}) - 1$

In conclusione possiamo allora dire che l'ipotesi iniziale $z^n - x^n = y^n$ risulta falsa e quindi ne consegue che la congettura di Fermat *per n intero positivo pari* è vera.

Supponiamo ora invece per ipotesi che la congettura sia falsa *per n dispari* e cioè che *per n dispari e maggiore di 2* esista almeno una terna di valori interi positivi x, y, z tali per cui l'equazione $z^n - x^n = y^n$ abbia almeno una soluzione.

Ma se la congettura di Fermat risulta vera per un esponente 'n' , esso é pure vera per ogni multiplo di n. Infatti, per ogni k > 1, si ha che:

$z^{kn} - x^{kn} = y^{kn} \Leftrightarrow Z^n - X^n = Y^n$ dove $Z = z^k$, $X = x^k$, $Y = y^k$

Quindi se esistesse una terna di valori interi positivi x, y, z tali per cui l'equazione $z^d - x^d = y^d$ *con d intero positivo dispari* risultasse vera, dovrebbe risultare vera ogni equazione $z^{kd} - x^{kd} = y^{kd}$ *con k pari,* il ché, *essendo ovviamente kd un intero positivo pari,* contraddice quanto prima dimostrato sulla veridicità della congettura di Fermat *per ogni n pari.*

In conclusione la congettura di Fermat risulta dimostrata sia per gli n, interi, positivi e maggiori di 2, pari che per quelli dispari.