Aldo Pappalepore
aldo.pappalepore@libero.it

Investigation of Lemoine e Levy conjectures with the primality theorems of Congruence and of Complementary Congruence

Indagine sulle congetture di Lemoine e Levy con i teoremi di primalità della Congruenza e della Congruenza Complementare

Abstract

In the article, a study on the Lemoine and Levy conjecture is developed that is very similar to the study on the Goldbach conjecture and how it is based on the two primality theorems of congruence and compcongruence. The study arrives at the proof of the Lemoine and Levy conjecture and, similar to the study on the Goldbach conjecture, opens up new areas of possible research in the field of Number Theory.

Nell'articolo viene sviluppato uno studio sulla congettura di Lemoine e Levy molto simile a quello sulla congettura di Goldbach e come questo si basa sui due teoremi di primalità della congruenza e della compcongruenza. Lo studio perviene alla dimostrazione della congettura di Lemoine e Levy ed, analogamente allo studio sulla congettura di Goldbach, apre nuovi ambiti di possibile ricerca nel campo della Teoria dei numeri.

1 Introduzione

La congettura afferma che: *"Ogni numero dispari maggiore di 5 può essere scritto come p+2q, in cui p e q sono numeri primi dispari non necessariamente distinti."*

L'analogia tra la congettura di Lemoine e Levy e quella di Goldbach ci spinge a seguire un percorso analogo di analisi e di approfondimento di questa congettura, percorso che ci ha portato ad intrecciare le due dimostrazioni estendendo i due teoremi di primalità della congruenza e della compcongruenza ai numeri uguali al doppio dei numeri primi.

Il teorema di primalità della Congruenza (1.2.1 [c]), ed in particolare il suo corollario (1.2.3 [c]), diventa così il teorema di primalità doppia della Congruenza ed il teorema di primalità della compcongruenza, ed in particolare il suo corollario (1.4.3 [c]), diventa così il teorema di primalità doppia della Compcongruenza.

2 Il teorema di primalità doppia della Congruenza

Enunciato 2.1 *$\forall N_0, n_0 \in N$ e di eguale parità con $N_0 \geq 10$, $0 \leq n_0 < N_0 - p_{max}$, con $\mathbb{P}(\sqrt{(N_0)})$ insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(N_0)}$ e con p_{max} numero primo più alto di $\mathbb{P}(\sqrt{(N_0)})$, condizione necessaria e sufficiente affinché $N_0 - n_0$ sia il doppio di un numero primo è che $n_0 \not\equiv N_0 (\mathrm{mod}\, p_i)$ $\forall p_i \in \mathbb{P}(\sqrt{(N_0)})$ e che $n_0 \neq N_0 - 2^k$.*

Dim. La dimostrazione, come l'enunciato, è simile a quella del primo teorema di primalità della Congruenza con la differenza che essendo N_0 ed n_0 entrambi pari la loro differenza 2*m sarà sempre pari e se n_0 non è uguale ad $N_0 - 2^k$ ed è incongruo con N_0 per tutti i numeri primi dispari $\leq \sqrt{(N_0)}$ vuol dire che m è un numero primo.

3 Il teorema di primalità doppia della Compcongruenza

Enunciato 3.1 *$\forall N_0, n_0 \in N$ e di eguale parità con $N_0 > 2$; $0 \le n_0 < N_0-1$, con $\mathbb{P}(\sqrt{(2N_0)})$ insieme dei numeri primi dispari $\le \sqrt{(2N_0)}$, condizione necessaria e sufficiente affinché $N_0 + n_0$ sia il doppio di un numero primo è che $n_0 \nparallel N_0 (mod\, p_i)$ $\forall p_i \in \mathbb{P}(\sqrt{(2N_0)})$ e che $n_0 \neq 2^k - N_0$.*

Dim. La dimostrazione, come l'enunciato, è del tutto simile a quella del teorema di primalità della Compcongruenza con la sola differenza che essendo N_0 ed n_0 entrambi dispari la loro differenza 2*m sarà sempre pari e se n_0 non è uguale a $2^k - N_0$ ed è incompcongruo con N_0 per tutti i numeri primi dispari $\le \sqrt{(2N_0)}$ vuol dire che m è un numero primo.

Utilizzando il teorema di primalità della congruenza ed il teorema di primalità doppia della Compcongruenza e considerando i due intervalli [0, (D-1)/2] e [(D+1)/2, D] con D numero dispari qualsiasi maggiore di 5 è possibile dimostrare la congettura di Lemoine e Levy rifacendosi alla dimostrazione della congettura di Goldbach [d].

Nell'Appendice A è raffigurato uno schema esemplificativo dei due intervalli con D=61 in cui sono evidenziati i numeri n_0 non congrui con (D-1)/2 ed i numeri n_0 non compcongrui con (D+1)/2 e tra questi i numeri n_0 che non sono congrui con (D-1)/2 ed insieme non sono compcongrui con (D+1)/2 e che quindi sottratti e sommati rispettivamente a (D-1)/2 ed a (D+1)/2 danno luogo ai termini p e 2q della congettura di Lemoine e Levy.

4 Il Teorema dei numeri primi di Lemoine e Levy

Enunciato *$\forall D, n_0 \in N$ e di eguale parità con $D > 5$, $0 \le n_0 \le ((\mathrm{D}-1)/2) - p_{max}$, con p_{max} numero primo più alto di $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\mathrm{D}-1)}\right)$, dove $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\mathrm{D}-1)}\right)$ è l'insieme dei numeri primi dispari $\le \sqrt{(\mathrm{D}-1)}$, condizione necessaria e sufficiente affinché $((\mathrm{D}-1)/2) - n_0$ sia primo e $((\mathrm{D}+1)/2) + n_0$ sia pari al doppio di un numero primo è che n_0 $\forall p_i \, \varepsilon \, \mathbb{P}\left(\sqrt{(\mathrm{D}-1)}\right)$ risulti incongruo con $((\mathrm{D}-1)/2)$ ed incompcongruo con $((\mathrm{D}+1)/2)$.*

Dim. Dal primo teorema della Congruenza (corollario 1,2,3 [c]) e dal teorema di primalità doppia della Compcongruenza (3), ponendo le condizioni più restrittive tra i due, discende che sicuramente esiste almeno un n_{01} incongruo con $((\mathrm{D}-1)/2)$ ed almeno un n_{02} incompcongruo con $((\mathrm{D}+1)/2)$ ma non possiamo far discendere da esse che esiste anche un $n_0 = \mathrm{n}_{01} = \mathrm{n}_{02}$.

Lemma 4.1 *Esiste un insieme infinito di numeri D tali che (D-1)/2 e (D+1)/2 già soddisfano la congettura essendo uno dei due uguale a p e l'altro a 2*q.*

Dim. Per D ≥ 15 gli (D-1)/2 e (D+1)/2 uguali a 2q non potranno mai essere multipli di 3 e quindi nelle terne (D-1)/2, (D+1)/2 e (D+1)/2 + 1 (p.es.: 7,8,9 – 8,9,10 – 9,10,11 – etc.) in cui uno dei due (D ± 1)/2 è uguale a 2q e (D+1)/2 + 1 è un multiplo di 3 l'altro (D ± 1)/2 sarà irregolarmente uguale a p. Indichiamo con Dpq tali numeri D.

Per dimostrare la congettura di Lemoine e Levy invece bisogna appurare che per ogni D > 5 esiste almeno un numero $\mathrm{n}_0 = \mathrm{n}_{01} = \mathrm{n}_{02}$ tale che $((\mathrm{D}-1)/2)$ *- n_0 sia primo,* $((\mathrm{D}+1)/2)$ *+ n_0 sia il doppio di un primo e che la loro somma sia uguale a D.* Indichiamo questo n_0 come numero LL (Lemoine Levy) *di D*.

A tal fine ricorriamo allo studio della densità dei numeri LL di Lemoine e Levy.

5 La densità dei numeri primi LL di Lemoine e Levy

Diciamo subito che ogni numero LL deve presentare le seguenti caratteristiche:

- la sua classe di modulo 2 deve essere uguale ad 1;
- le sue classi di modulo dei primi successivi (3, 5, 7, etc.) minori o uguali della $(\sqrt{((D-1)/2)})$ non devono essere uguali alle classi corrispondenti al resto di $((D-1)/2)$ (per la non congruenza) ed al complemento del resto di $((D+1)/2)$ (per la non compcongruenza) per gli stessi moduli.

Ciò detto vediamo come calcolare il numero degli LL minori di un $((D-1)/2) \geq 121$, condizione questa derivante come sappiamo (studio sulla congettura di Goldbach, 1.7.1) dalla necessità che D-1 appartenga all'intervallo $[0, \sqrt{(\mathbf{D-1})}\ \#]$.

Selezionato allora un D ≥ 243 qualsiasi, chiamiamo pmax il numero primo più alto minore o uguale della $\sqrt{(D-1)}$. Consideriamo quindi la tabella-intervallo dei numeri naturali [0, pmax#] dove pmax# è il primoriale di pmax e corrisponde al prodotto 2*3*5*…….* pmax, prodotto che corrisponde all'ultimo numero della relativa Tabella numeri-classi pmax (studio sulla congettura di Goldbach , 1.5.1) di corrispondenza biunivoca tra i numeri dell'intervallo e le rispettive combinazioni delle loro classi di congruenza.

Eliminiamo ora da questa tabella [0, pmax#] ognuna delle righe che presenta una classe di congruenza mod 2 uguale 0 e/o classi di congruenza dei moduli successivi (3, 5, ….. , pmax) uguali alle classi corrispondenti al resto di $((D-1)/2)$ ed al complemento del resto di $((D+1)/2)$ per gli stessi moduli.

I numeri M della tabella, non eliminati attraverso il precedente crivello, possono essere allora solo:

a) quelli che nella Tabella numeri-classi pmax presentano nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza la classe di congruenza 1 modulo 2
b) quelli che nella Tabella numeri-classi pmax per ogni p_i dispari appartenente all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\mathbf{D-1})}\right)$ presentano nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza una delle p_i - 2 possibili classi di congruenza dei moduli 3, 5, ….. , p_{max} con l'esclusione cioè delle classi corrispondenti al resto di $((D-1)/2)$ (per la non congruenza) ed al complemento del resto di $((D+1)/2)$ (per la non compcongruenza) per gli stessi moduli.

Per ogni numero D allora le righe (combinazioni di classi) della tabella [0, pmax#] non cancellate e quindi gli M incongrui con (D-1)/2 ed incompcongrui con (D+1)/2, in base al calcolo combinatorio e quindi corrispondenti, risulteranno essere:

(5.1) $\prod_{p=3}^{p_{max}}(p-2)$

e la loro densità nell'intervallo $[0, \sqrt{(\mathbf{D-1})}\ \#]$ sarà:

(5.2) $Dncncomp_{[0,\sqrt{(\mathbf{D-1})}\ \#]} = \frac{\prod_{p=3}^{pmax}(p-2)}{\prod_{p=2}^{pmax} p} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax} \frac{(p-2)}{p}$

Il valore di $p_{\max}$ della (5.2), e quindi anche la densità $Dncncomp_{[0,\sqrt{(\mathbf{D-1})}\ \#]}$, rimane lo stesso per ogni intervallo $[0, \sqrt{(\mathbf{D-1})}\ \#]$ con D tale che risulti $p_{\max} < \sqrt{D-1} < p_{\max succ}$ dove $p_{\max}$ è il primo più alto minore di $\sqrt{D-1}$ e $p_{\max succ}$ il numero primo immediatamente successivo a $p_{\max}$, Quindi per tutti gli D appartenenti all'intervallo $[p_{max}{}^2 + 1, p_{\max succ}{}^2]$ la densità $Dncncomp_{[0,\sqrt{(\mathbf{D-1})}\ \#]}$ rimane la stessa ed uguale a quella dei numeri Dpq contenuti in esso.

Alla densità $Dncncomp_{[0,\sqrt{(\mathbf{D-1})}\ \#]}$ che rappresenta la densità dei numeri M dell'intervallo $[0, \sqrt{(\mathbf{D-1})}\ \#]$ incongrui con (D-1)/2 ed incompcongrui con (D+1)/2 per i soli moduli p_i appartenenti all'insieme dei numeri primi dispari $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\mathbf{D-1})}\right)$ corrisponde una densità

$Dncncomp_{[0,\ (D-1)/2]}$ dei numeri incongrui con (D-1)/2 ed incompcongrui con (D+1)/2 nell'intervallo [0, (D-1)/2] sempre per i soli moduli p_i appartenenti all'insieme dei numeri primi dispari $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\mathbf{D-1})}\right)$ (e quindi non per il modulo 2), e cioè dei numeri LL di D. Ma per questi ultimi già sappiamo (Lemma 4.1) che esiste almeno un numero LL = 0 che soddisfa la congettura e che ci consente di scrivere:

(5.3) $Dncncomp_{[0,\ (D-1)/2]} \geq \frac{2}{D-1}$

Ora essendo la densità $Dncncomp_{[0,\sqrt{(\mathbf{D-1})}\#]}$ uguale per tutti gli D appartenenti all'intervallo $[{p_{max}}^2 + 1, {p_{\max succ}}^2]$ sarà uguale anche la densità corrispondente $Dncncomp_{[0,\ (D-1)/2]}$ degli stessi D e pertanto la (5.3) risulta valida per ogni D del suddetto intervallo.

Ed ancora, moltiplicando ambo i membri della (5.3) per (D-1)/2 il numero M_{LL} dei numeri LL di D sarà :

(5.4) $M_{LL} = Dncncomp_{[0,\ (D-1)/2]} \ * \ \frac{D-1}{2} \geq 1$

Di conseguenza M_{LL} sarà sempre maggiore o uguale ad 1 e quindi ci sarà sempre almeno una coppia di primi p e q tali che p+2q = D come previsto dalla congettura di Lemoine e Levy.

Per gli D minori di 243 la congettura di di Lemoine e Levy è facilmente verificabile.

APPENDICE A

Volendo fare un esempio numerico poniamo D = 61 e per facilità di esposizione indichiamo l'intervallo [0, D] con i due intervalli [0, (D-1)/2] = [0, 30] e [(D+1)/2, D] = [31, 61] nel modo sottoindicato.
Lateralmente ai due intervalli sono stati messi in evidenza i numeri n_0 dell'intervallo [0, 30] non congrui (nc) con 30 ed i numeri n_0 dell'intervallo [31, 61] non compcongrui (ncc) con 31

n_0		[0, (D-1)/2]	[(D+1)/2,0]	
0		30	31	ncc
1	nc	29	32	
2		28	33	
3		27	34	ncc
4		26	35	
5		25	36	
6		24	37	
7	nc	23	38	ncc
8		22	39	
9		21	40	
10		20	41	
11	nc	19	42	
12		18	43	
13	nc	17	44	
14		16	45	
15		15	46	ncc
16		14	47	
17	nc	13	48	
18		12	49	
19	nc	11	50	
20		10	51	
21		9	52	
22		8	53	
23	min. di rad(61)	7	54	
24		6	55	
25	min. di rad(61)	5	56	
26		4	57	
27	min. di rad(61)	3	58	ncc
28		2	59	
29		1	60	
30		0	61	

Nella tabella ci sono 6 numeri nc nell'intervallo [0, 30] e 5 numeri ncc nell'intervallo [31, 61] ed un solo n_0 uguale a 7 nc ed ncc. (p=23 e q=19)

BIBLIOGRAFIA

[a] Alessandro Zaccagnini - Introduzione alla Teoria Analitica dei Numeri:
http://people.dmi.unipr.it/alessandro.zaccagnini/psfiles/lezioni/tdn2005.pdf

[b] Francesco Fumagalli - Appunti di Teoria elementare dei numeri:
Teoria_dei_Numeri.pdf (unifi.it)

[c] Aldo Pappalepore – Congruenza, Primalità e Densità:
https://www.aldopappalepore.it/_downloads/394a65a2c2c6bc8a27c5aab800f93b84

[d] Aldo Pappalepore – La congettura di Goldbach:
https://www.aldopappalepore.it/_downloads/2304af4eadee444ae9e293aee09cc6de