**Aldo Pappalepore**
aldo.pappalepore@libero.it

***Investigation of Goldbach conjecture with the primality theorems of Congruence and of Complementary Congruence***

***Indagine sulla congettura di Goldbach con i teoremi di primalità della Congruenza e della Congruenza Complementare***

***Abstract***

***This article provides novel insights on Goldbach's conjecture; this work is primarily based on two primality theorems of congruence and of compcongruence. Study results in demonstration of the Goldbach conjecture.The approach taken also opens up new areas of possible research in the field of Number Theory.***

***Nell'articolo viene sviluppato uno studio sulla congettura di Goldbach; esso è basato prioritariamente su due teoremi di primalità della congruenza e della compcongruenza. Lo studio perviene alla dimostrazione della congettura di Goldbach. Lo studio, oltre ai risultati raggiunti, apre nuovi ambiti di possibile ricerca nel campo della Teoria dei numeri.***

## 1 La dimostrazione della congettura di Goldbach

La congettura di Goldbach presuppone che per ogni numero pari $2N_0$ esistano uno o più numeri $n \in N$ tali che $N_0 - n$ ed $N_0 + n$ siano due numeri primi la cui somma è ovviamente uguale a $2N_0$.

Dato un $N_0 \in N$ indichiamo con la lettera Ꞡ ogni numero $n \in N$ tale che $N_0 - n$ ed $N_0 + n$ siano due numeri primi.

### 1.1 Il Teorema dei numeri Ꞡ di $N_0$

**Definizione 1.1.1** *$\forall N_0, n_0 \in N$ ed $n_0$ pari se $N_0$ è dispari o viceversa, con $N_0 \geq 9$, $0 \leq n_0 \leq N_0 - p_{max}$, con $p_{max}$ numero primo più alto di $\mathbb{P}(\sqrt{2N_0})$, dove $\mathbb{P}(\sqrt{2N_0})$ è l'insieme dei numeri primi dispari $\leq \sqrt{(2N_0)}$, condizione necessaria e sufficiente affinché $N_0 - n_0$ ed $N_0 + n_0$ siano due numeri primi è che $n_0$ sia un numero incongruo ed incompcongruo di $N_0$ (1.2.3 ed 1.4.3 [c]).*

**Dim.** Dai Corollari (1.2.3 [c]) ed (1.4.3 [c]), ponendo le condizioni più restrittive tra i due, discendono le condizioni necessarie e sufficienti del Teorema. Così come dalle Osservazioni (1.2.5) ed (1.4.4) discende che sicuramente esiste almeno un $n_{01}$ incongruo ed almeno un $n_{02}$ incompcongruo di $N_0$ ma non possiamo far discendere da esse che esiste anche un $n_0 = n_{01} = n_{02}$.
Per dimostrare la congettura di Goldbach invece bisogna appurare che per ogni $N_0 \geq 9$ esiste almeno un $n_0 = n_{01} = n_{02}$ e cioè un numero Ꞡ, incongruo ed incompcongruo di $N_0$.

A parte il caso particolare di un $N_0$ primo e quindi della sicura esistenza di un Ꞡ = 0, dobbiamo quindi dimostrare che per ogni $N_0$ esiste sempre un Ꞡ incongruo ed incompcongruo di $N_0$ e quindi che esistono sempre due numeri primi equidistanti da $N_0$:

$p_1 = N_0 -$ Ꞡ

$p_2 = N_0 +$ Ꞡ

e la cui somma è evidentemente uguale a $2N_0$.

A tal fine ricorriamo allo studio della densità dei numeri Ǥ.

**1.2 La densità dei numeri Ǥ**

Diciamo subito che ogni Ǥ deve presentare le seguenti caratteristiche:

- la sua classe di modulo 2 deve essere uguale a zero se $N_0$ è dispari, ad 1 se $N_0$ è pari;
- le sue classi di modulo dei primi successivi (3, 5, 7, etc.) minori o uguali della $\left(\sqrt{2N_0}\right)$ non devono essere uguali alle due classi corrispondenti al resto (per la non congruenza) ed al suo complemento (per la non compcongruenza) di $N_0$ per gli stessi moduli (*per esempio se* $N_0 = 43$ *e Ǥ=30 si ha che* $\mathbb{P}(\sqrt{N_0})$ *= {3,5}; [43]*$_{mod3}$*= 1 con complemento uguale a 2, [43]*$_{mod5}$*= 3 con complemento uguale a 2; [30]* $_{mod3}$*=[0] e [30]* $_{mod5}$*=[0]; pertanto Ǥ risulta prisotto e prisopra di* $N_0$ *e quindi 73 (43+30) e 13 (43-30) costituiscono una coppia di primi la cui somma è uguale a* $2N_0$ ).

Ciò detto vediamo come calcolare il numero dei Ǥ minori di un $N_0 \geq 121$ (condizione questa derivante come sappiamo (1.7.2 [c]) dalla necessità che $2N_0$ appartenga all'intervallo [0, $\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}$ #]).
Selezionato allora un $N_0 \geq 121$ qualsiasi, chiamiamo $p_{max}$ il numero primo più alto minore o uguale della $\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}$. Consideriamo quindi la tabella-intervallo dei numeri naturali [0, $\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}$ #] = [0, $p_{max}$#], dove $p_{max}$ è il numero primo più alto minore della $\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}$, e $p_{max}$# corrisponde al prodotto 2*3*5*…….* $p_{max}$, prodotto che corrisponde all'ultimo numero della relativa Tabella numeri-classi $p_{max}$ (1.5.1 [c]) di corrispondenza biunivoca tra i numeri dell'intervallo e le rispettive combinazioni delle loro classi di congruenza.

Eliminiamo ora da questa tabella [0, $p_{max}$#] ognuna delle righe che presenta una classe di congruenza mod 2 uguale 0 o ad 1 a seconda se $N_0$ è pari o dispari, e/o classi di congruenza dei moduli successivi (3, 5, ….. , $p_{max}$) uguali ad una delle due classi corrispondenti al resto ed al complemento di $N_0$ per gli stessi moduli.
I numeri M della tabella, non eliminati attraverso il precedente crivello, possono essere allora solo:

a) quelli che nella Tabella numeri-classi $p_{max}$ presentano nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza una sola delle due possibili classi di congruenza modulo 2
b) quelli che nella Tabella numeri-classi $p_{max}$ per ogni $p_i$ dispari appartenente all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}\right)$ e NON FATTORE di $N_0$ presentano nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza una delle $p_i$ -2 possibili classi di congruenza dei moduli 3, 5, ….. , $p_{max}$ con l'esclusione cioè delle due classi corrispondenti al resto ed al complemento di $N_0$ per gli stessi moduli $p_i$ (*se per es.* ($N_0$) *mod7 = 3 con complemento = 4, (M) mod7 dovrà essere eguale ad una delle 5 (7-2) possibili altre classi di congruenza: 0,1,2,5,6*)
c) quelli che nella Tabella numeri-classi $p_{max}$ per ogni $p_i$ dispari appartenente all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}\right)$ e FATTORE di $N_0$ presentano nella loro corrispondente combinazione di classi di congruenza una delle $p_i$ -1 possibili classi di congruenza diverse da [0] che costituisce sia il resto che il complemento di $N_0$ per gli stessi moduli-fattori.

I numeri $N_0$ con fattori diversi dai $p_i$ dispari appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}\right)$, e che quindi rientrano nella categoria b) della precedente classificazione, sono i numeri primi esterni all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(\boldsymbol{2N_0})}\right)$ od un loro multiplo con coefficiente $2^n$ oppure una semplice potenza di 2. In particolare prendiamo in esame i soli numeri primi che chiameremo $N_{0pm}$ indicando con $\mathbb{P}$ il loro insieme.

Per i numeri $N_{0pm}$ allora le righe (combinazioni di classi) della tabella [0, $p_{max}$#] non cancellate, in base al calcolo combinatorio, risulteranno essere:

(1.2.1) $\prod_{p=3}^{p_{max}}(p-2)$

La (1.2.1) ci fornisce quindi la quantità dei numeri M della tabella incongrui ed incompcongrui con $N_{0pm}$ per gli $p_i$ appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_{0pm})}\right)$ mentre nulla possiamo dire circa la loro eventuale (non) congruenza e/o (non) compcongruenza con $N_{0pm}$ relativamente agli altri moduli $p_j$ maggiori di $p_{max}$ ed appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(pmax\#)}\right)$.

Ma questo ci basta per affermare che in base al Teorema dei numeri ~~G~~ (1.1.1) possiamo dire che tutti i numeri **M minori di $N_{0pm}$ ($M_{\cancel{G}}$)** sono incongrui ed incompcongrui di $N_{0pm}$ e quindi sono numeri ~~G~~.

**Osservazione 1.2.2** *Per il corollario (1.2.3 [c]) e l'osservazione (1.2.4 [c]) sappiamo però anche che tali numeri $M_{\cancel{G}}$, (incongrui ed incompcongrui di $N_{0pm}$) non comprendono i possibili $n_0$ per i quali ($N_{0pm} - n_0$) è uguale ad un $p_i$ appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_{0pm})}\right)$. Di conseguenza tutti i numeri ~~G~~ minori di $N_{0pm}$ risultano sempre maggiori/uguali dei numeri $M_{\cancel{G}}$.*

La densità media, che indichiamo con $Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]}$, dei numeri M esistenti nell'intervallo [0, $\sqrt{(2N_{0pm})}$#] **non congrui e non compcongrui con $N_{0pm}$ per i soli moduli $p_i$** appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_{0pm})}\right)$, sapendo che $\sqrt{(2N_{0pm})}\# = 2*3*\ldots\ldots* p_{max}$, si può scrivere:

(1.2.3) $Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]} = \frac{\prod_{p=3}^{pmax}(p-2)}{\prod_{p=2}^{pmax} p} = \frac{1}{2} * \prod_{p=3}^{pmax}\frac{(p-2)}{p}$

Alla densità $Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\#]}$ dei numeri incongrui ed incompcongrui con $N_{0pm}$ **per i soli moduli $p_i$** appartenenti all'insieme $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_{0pm})}\right)$ corrisponde una densità $Dncncomp_{[0,\ N_{0pm}]}$ dei numeri incongrui ed incompcongrui minori di $N_{0pm}$ e cioè dei numeri $\cancel{G} \leq N_{0pm}$ ed essendo $N_{0pm}$ primo possiamo affermare che sicuramente 0 è uno di questi numeri ~~G~~.

Si può quindi scrivere:

(1.2.4) $Dncncomp_{[0,\ N_{0pm}]} \geq \frac{1}{N_{0pm}}$

ed ancora, moltiplicando ambo i membri della (1.2.4) per $N_{0pm}$, il numero $M_{\cancel{G}(N_{0pm})}$ dei numeri ~~G~~ minori/uguali di $N_{0pm}$ :

(1.2.5) $M_{\cancel{G}(N_{0pm})} = Dncncomp_{[0,\ N_{0pm}]} * N_{0pm} \geq 1$

Per gli $N_0$ invece diversi dagli $N_{0pm}$ la $Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_0}\#]}$ (1.2.3) si modifica nell'espressione:

(1.2.6) $Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_0}\#]} = \frac{1}{2} * \prod_{3\leq p_l\leq p_{max}}\frac{(p_l-2)}{p_l} * \prod_{3\leq p_j\leq p_{max}}\frac{(p_j-1)}{p_j}$

in cui i primi $p_j$ appartenenti a $\mathbb{P}\left(\sqrt{(2N_0)}\right)$ compaiono distinti in quelli $p_j$ uguali ai fattori di $N_0$ ed in quelli $p_l$ che non lo sono [vedi paragrafo 1.2 punti b) e c)]. Ma la (1.2.6) si può scrivere anche così:

(1.2.7) $Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_0}\,\#]} = \frac{1}{2} * \prod_{3\le p_i \le p_{max}} \frac{(p_i-2)}{p_i} * \prod_{3\le p_j \le p_{max}} \frac{(p_j-1)}{(p_j-2)}$

Sapendo che il valore di $p_{\max}$ della (1.2.3) e della (1.2.7) rimane lo stesso per ogni intervallo [0, $N_0$ #] con $N_0$ tale che risulti $p_{\max} < \sqrt{2N_0} < p_{\max\,succ}$ dove $p_{\max}$ è il primo più alto minore di $\sqrt{2N_{0pm}}$ e $p_{\max\,succ}$ il primo immediatamente successivo a $p_{\max}$, dal confronto tra la (1.2.7), in cui $Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_0}\,\#]}$ è relativo ad un $N_0$ qualsiasi diverso da $N_{0pm}$, e la (1.2.3) relativa al primo $N_{0pm}$ risulta:

(1.2.8) $Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_0}\,\#]} = Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\,\#]} * \prod_{3\le p_j \le p_{max}} \frac{(p_j-1)}{(p_j-2)}$

in cui entrambe le densità si riferiscono allo stesso intervallo [0, $p_{max}$ #] con $p_{max}\,\# = \sqrt{2N_0}\,\# = \sqrt{2N_{0pm}}\,\#$ ma si riferiscono rispettivamente agli interi dell'intervallo incongrui ed incompcongrui con due numeri diversi: $N_0$ ed $N_{0pm}$

Essendo il termine $\prod_{3\le p_j \le p_{max}} \frac{(p_j-1)}{(p_j-2)} > 1$ dalla (1.2.8) si può dedurre:

(1.2.9) $Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_0}\,\#]} > Dncncomp_{[0,\ \sqrt{2N_{0pm}}\,\#]}$

In base alla (1.2.9) possiamo ritenere che anche la densità $Dncncomp_{[0,\ N_0]}$ dei numeri incongrui ed incompcongrui minori di $N_0$ e cioè dei numeri Ǥ $\le N_0$ nell'intervallo [0, $N_0$] sia maggiore di quella $Dncncomp_{[0,\ N_{0pm}]}$ dei numeri incongrui ed incompcongrui minori di $N_{0pm}$ nell'intervallo [0, $N_{0pm}$]. Di conseguenza è possibile scrivere:

(1.2.10) $Dncncomp_{[0,\ N_0]} > Dncncomp_{[0,\ N_{0pm}]}$

ed in base alla (1.2.4):

(1.2.11) $Dncncomp_{[0,\ N_0]} \ge \frac{1}{N_{0pm}}$

ed ancora, moltiplicando ambo i membri della (1.2.11) per $N_0$, il numero $M_{Ǥ(N_0)}$ dei numeri Ǥ minori/uguali di $N_0$, si ottiene :

(1.2.12) $M_{Ǥ(N_0)} = Dncncomp_{[0,\ N_0]} * N_0 \ge 1$

Dalla (1.2.12) discende quindi che anche per tutti i numeri $N_0 \ne N_{0pm}$ i numeri Ǥ risultano essere sempre maggiori o uguali ad 1 e quindi ci sarà sempre almeno una coppia di primi ($N_0$ - Ǥ ed $N_0$ + Ǥ ) la cui somma è pari a 2*$N_0$ come previsto dalla congettura di Goldbach.

Per gli $N_0$ minori di 121 la congettura di Goldbach è facilmente verificabile.

## BIBLIOGRAFIA

[a] Alessandro Zaccagnini - Introduzione alla Teoria Analitica dei Numeri:
http://people.dmi.unipr.it/alessandro.zaccagnini/psfiles/lezioni/tdn2005.pdf

[b] Francesco Fumagalli - Appunti di Teoria elementare dei numeri:
Teoria_dei_Numeri.pdf (unifi.it)

[c] Aldo Pappalepore – Congruenza, Primalità e Densità:
https://www.aldopappalepore.it/_downloads/394a65a2c2c6bc8a27c5aab800f93b84